

## Estudo de Sistema Complexo Encosta Hidrológica com Critérios Multiobjetivos

### *Study of Complex Hydrological Slope System with Multiobjective Criteria*

Agüero-Martínez, Domingo Stalin<sup>1</sup>, Moret, Marcelo Albano<sup>2</sup>.

#### RESUMO

Este trabalho aborda o estudo de um sistema complexo de encosta hidrológica utilizando algoritmos de otimização multiobjetivos. A complexidade desse tipo de calibração baseia-se nas incertezas associadas às propriedades hidráulicas do solo. O estudo de caso em escala maior de encosta hidrológica revelam vários desafios, os quais foram, a consideração de quatro horizontes diferentes de solo, a simulação das interfaces entre camadas de solo, entre outros. O estudo de caso escolhido foi conveniente pois ofereceu medidas de potencial matricial tanto ao longo de sua extensão como na profundidade da encosta. Adicionalmente, foram disponibilizadas medidas de vazão subsuperficial coletadas na base da encosta. A performance de calibração baseou-se na utilização de diversas técnicas, como foram, modelo matemático de simulação do fenômeno físico, modelo inverso, modelo constitutivo, entre outros. Na análise do modelo matemático, foi realizada a contextualização do fluxo de água em solo não saturado em equações diferenciais parciais. O modelo matemático foi auxiliado pelas técnicas do Método dos Elementos Finitos para a discretização do domínio físico e do Método das Diferenças Finitas para a discretização no tempo. Dessa maneira, foram formuladas matrizes para o ajuste do modelo matemático. Finalmente, para esses propósitos de calibração foi utilizado o algoritmo MOPSO (*Multi Objective Particle Swarm Optimization* do Inglês) para um ajuste multiobjetivo. Os resultados de simulação apresentam-se razoáveis, mas ainda existem paradigmas a serem desvendados especialmente em relação às propriedades hidráulicas do solo.

**Palavras-chave:** Sistema complexo; Mopso; Modelo Inverso; Modelo Constitutivo; Encosta hidrológica.

#### ABSTRACT

This work addresses the study of a complex hydrological slope system using multi-objective optimization algorithms. The complexity of this type of calibration is based on the uncertainties associated with the hydraulic properties of the soil. The larger scale case study of hillslope reveals several challenges, which were, considering four different soil horizons, the simulation of the interfaces between layers of soil, among others. The chosen study case was convenient because it offered measures of suction matric both along its length and at the depth of the hillslope. Additionally, subsurface flow measurements were made available at the base of the slope. The calibration performance was based on the use of several techniques, such as, mathematical model of simulation of the physical phenomenon, inverse model, constitutive model, among others. In the analysis of the mathematical model, the water flow was contextualized in unsaturated soil in partial differential equations. The mathematical model was aided by the techniques of the Finite Element Method for discretization of the physical domain and the Finite Differences Method of discretization in time. In this way, matrices were formulated to fit the mathematical model. Finally, for purposes of calibration was used the MOPSO (*Multi Objective Particle Swarm Optimization*) algorithm for a multiobjective adjustment. The results of simulation are reasonable, but there are still paradigms to be uncovered especially in relation to the hydraulic properties of the soil.

**Keywords:** Complex system; Mopso; Inverse model; Constitutive model; Hillslope.

<sup>1</sup> Doutorando no Centro Universitário SENAI-CIMATEC.

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0620-9318>

E-mail:

[domingostalin@ifba.edu.br](mailto:domingostalin@ifba.edu.br)

<sup>2</sup> PhD. e docente no Centro Universitário SENAI-CIMATEC.

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0051-6309>

E-mail: [mamoret@gmail.com](mailto:mamoret@gmail.com)

## 1. INTRODUÇÃO

Atualmente, existem grandes dificuldades no estudo de transporte de contaminantes ao longo de encostas que influenciam a composição química de córregos e, conseqüentemente, a qualidade da água (Harris et al., 2018).

Por esse motivo, a importância de se analisar tais fenômenos físicos de transporte de fluxo de água em bacias hidrológicas, sendo uma parcela dessa análise o de encosta hidrológica (Han et al., 2018).

Uma maneira de abordagem da simulação do fenômeno físico de fluxo de água no solo é mediante modelos matemáticos que utilizam equações diferenciais que, na sua vez, relacionam as propriedades hidráulicas do solo não saturado que, neste estudo, enquadra-se em encosta hidrológica (Fullhart et al., 2017).

Uma grande desvantagem de tais abordagens de modelos matemáticos é a escassez de medições em campo, que daqui em diante serão chamados de “dados observados”.

Diante desse desafio, a calibração automática tem-se tornado em uma ferramenta matemática fundamental pelos pesquisadores, pois abrange diversas técnicas como são o modelo inverso, o modelo constitutivo de solos, o estabelecimento de funções objetivo, entre outros.

Adicionalmente, as técnicas revolucionárias computacionais aceleraram o processamento de dados, desse modo, foram utilizados pelos pesquisadores algoritmos de otimização em auxílio da calibração automática desses modelos matemáticos (Wöhling et al., 2007; Esfe et al., 2018; Aghajani e Ghadimi, 2018; Guang-Yu et al., 2018).

Apontando a esse enfoque, Agüero-Martinez e Reis (2017) realizaram uma comparação entre três algoritmos multiobjetivos e demonstraram a versatilidade e adaptabilidade do MOPSO (*Multi Objective Particle Swarm Optimization*, Alvarez-Benitez, 2005) de ser implementada em modelos matemáticos, além da rapidez de convergência atingindo uma razoável precisão de resultados através de uma curva resposta chamada de “frente de Pareto”.

Por causa disso, optou-se pelo uso do MOPSO na calibração automática proposta neste trabalho.

Nessa linha de pesquisa, para fins de calibração automática se faz necessário o estabelecimento de funções objetivo (FO) com base em dados observados em campo.

Essas FO representam o grau de ajuste da simulação do modelo matemático aplicado ao fenômeno físico em estudo.

Por esse motivo, a escolha do estudo de caso em escala maior de encosta hidrológica colhido da literatura (KOIDE, 1990) resulta conveniente, pois oferece dados observados de potenciais matriciais ao longo da sua extensão e da profundidade e em diferentes camadas da encosta hidrológica, assim como disponibilizar dados observados de vazão subsuperficial que foram coletadas na base da encosta, facilitando o estabelecimento das FO.

Finalmente, este trabalho tem como objetivo a calibração automática de modelos matemáticos que simulam o fenômeno físico de fluxo de água subsuperficial em encosta hidrológica, apresentando uma abordagem criteriosa das propriedades hidráulicas dos solos em estado não saturado.

## 2. MATERIAIS E MÉTODOS

### MODELO MATEMÁTICO

Como mencionado, o modelo matemático baseia-se em equações diferenciais parciais que foi estabelecido por Richards (1935), como representado na seguinte equação:

$$\frac{d\theta_{\omega}}{dt} = \frac{d}{dx} \left[ K_x(\psi) \left( \frac{d\psi}{dx} \right) \right] + \frac{d}{dy} \left[ K_y(\psi) \left( \frac{d\psi}{dz} \right) \right] + \frac{d}{dz} \left[ K_z(\psi) \left( \frac{d\psi}{dz} + 1 \right) \right]$$

(1)

onde:  $d\theta_{\omega}/dt$  é o avanço da frente de umidade ao longo do tempo ( $L^3L^{-3}T^{-1}$ );  $K_i(\psi)$  é a condutividade hidráulica em função do potencial matricial, sendo  $i = x, y, z$ , ( $LT^{-1}$ );  $d\psi/dx$ ,  $d\psi/dy$ ,  $d\psi/dz$ , representam a taxa de potencial matricial na direção  $x, y, z$ , sendo  $z$  a direção da gravidade.

Os pesquisadores apontam na proposta de resolver o modelo matemático da equação 1 pelo uso do método das diferenças finitas (MDF) no tempo e de utilizar o método dos elementos finitos (MEF) no espaço.

A aplicação do MDF no tempo que resolve a parcela da equação na direção  $x$ , sem ser a direção da gravidade, apresenta a seguinte equação:

$$\frac{\theta_i^{j+1} - \theta_i^j}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta x} \left[ k_{i+1/2}^{j+u} \left( \frac{\psi_{i+1}^{j+u} - \psi_i^{j+u}}{\Delta x} \right) - k_{i-1/2}^{j+u} \left( \frac{\psi_i^{j+u} - \psi_{i-1}^{j+u}}{\Delta x} \right) \right]$$

(2)

sendo:  $i$  o índice de espaço;  $j$  o índice de tempo;  $\Delta t$  o acréscimo do tempo (T);  $\Delta x$  o acréscimo do espaço, sem ser a direção da gravidade, (L);  $0 \leq u \leq 1$ , se  $u = 0$  é a forma explícita, se  $u = 1$  é a forma implícita e se  $u = 0,5$  é a forma semi-implícita, centrada no tempo.

Para a solução espacial da equação 1 utiliza-se a solução numérica do Método dos Elementos Finitos (MEF). O MEF estabelece uma discretização espacial com elementos finitos de forma triangular, retangular, entre os mais conhecidos, para duas dimensões. Em cada elemento, a variável de potencial matricial no modelo ( $\Psi$ ) é aproximada por uma série de funções bidimensional (usualmente lineares no estudo de fluxo) e submete-se essa proposta como solução aproximada da equação 1 de fluxo ao nível do elemento finito. Essas funções de aproximação devem satisfazer todas as condições de contorno do problema físico, sendo chamadas na literatura de funções de forma ou interpolação. A montagem da solução aproximada da equação 1 de fluxo de cada elemento para todo o domínio do problema físico origina resíduos, denominadas na literatura de “resíduo da solução aproximada”. O método dos resíduos ponderados redistribui esse resíduo utilizando funções de ponderação, que no método de Galerkin, são as próprias funções de interpolação. A proposta do método de resíduos ponderados foram resolvidos utilizando a integração por partes. Na literatura, propuseram-se diferentes maneiras de resolver as integrais procedentes da simulação do MEF aplicados à equação de fluxo em solo não saturado (equação 1) de forma que convirja nas iterações no espaço e no tempo. Dentre essas soluções, segundo a literatura, os pesquisadores encontraram apropriado modelar em cada elemento finito expressões simplificadoras em forma de matrizes como mostrado na equação 3:

$$\overline{Matriz Fluxo} |\psi| + \overline{Matriz Retenção} \left| \frac{d\psi}{dt} \right| = \overline{Vazões Nodais} - \overline{Vazão Gravita} \quad (3)$$

em que:  $\overline{Matriz Fluxo}$  é a matriz que isola o elemento de fluxo;  $\overline{Matriz Retenção}$  é a matriz de capacidade de retenção;  $\overline{Vazão Gravita}$  é a matriz de fluxo que inclui os efeitos gravitacionais;  $\overline{Vazões Nodais}$  é a matriz do fluxo através do contorno;  $|\Psi|$  = vetor com o valor de  $\Psi$  (potencial matricial ou poropressão) em todos os nós da malha do MEF;  $\left| \frac{d\Psi}{dt} \right|$  = vetor com a taxa de variação de  $\Psi$  no tempo em cada nó da malha do MEF.

## MODELO CONSTITUTIVO

Os pesquisadores apontaram a utilização de um modelo obtido em laboratório que relaciona os parâmetros hidráulicos do solo em estado não saturado, ao qual denominaram de “modelo constitutivo” que, na sua vez, auxilia à solução da equação 1 que governa o fluxo de água em meio não saturado.

Neste trabalho, foi colhido o Modelo de van Genuchten (MVG, 1980), por ser muito utilizado na literatura.

Uma forma de expressar o MVG no espaço e no tempo é apresentada na seguinte equação:

$$\frac{\theta_i^j - \theta_{res}}{\theta_{sat} - \theta_{res}} = \left[ \frac{1}{1 + (\alpha |\psi_i^j|)^n} \right]^m$$

(4)

em que:  $i$  representa os pontos de controle no espaço;  $j$  é o índice de tempo;  $\theta_i^j$  é a umidade volumétrica, no tempo  $j$  e no ponto  $i$  ( $L^3L^{-3}$ );  $\theta_{sat}$  é a umidade do solo saturado ( $L^3L^{-3}$ );  $\theta_{res}$  é a umidade residual ( $L^3L^{-3}$ );  $\psi_i^j$  é o potencial matricial no tempo  $j$  e no ponto  $i$  (L);  $\alpha$  é um fator empírico ( $L^{-1}$ );  $n$  é outro coeficiente adimensional, e;  $m = (n-1)/(n)$ .

## ESTUDO DE CASO

O estudo de caso foi colhido da literatura (KOIDE, 1990), sendo uma encosta hidrológica de 8,5 m de profundidade com 15,5 m de extensão, localizado em Loch Chon, Inglaterra, como mostrado na Figura 1.

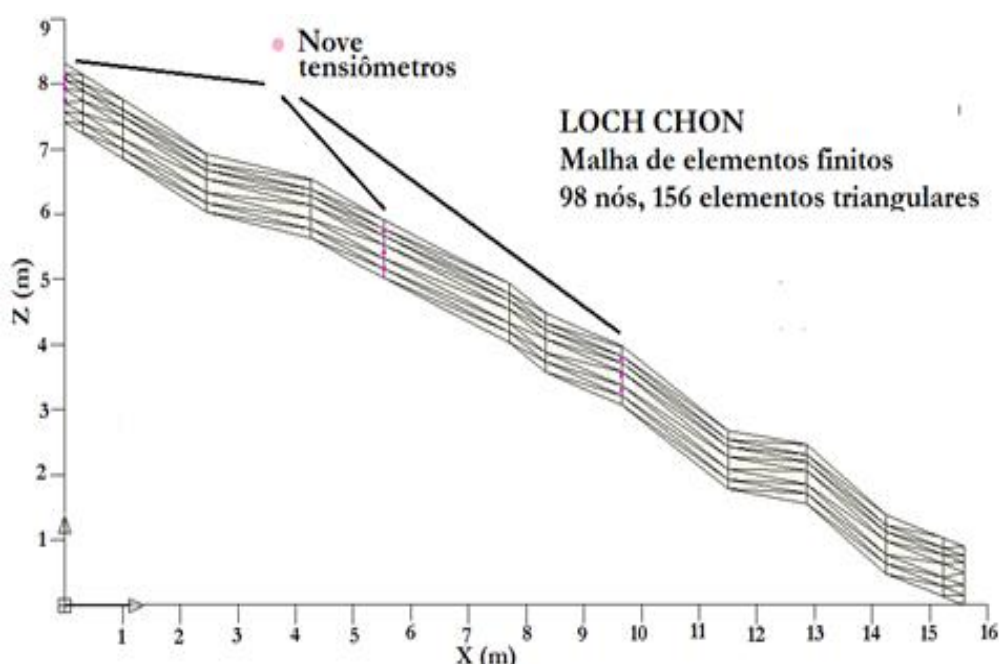
Esse estudo de caso, como mencionado, oferece dados observados tanto de potencial matricial como de vazões subsuperficiais.

Os dados observados de potencial matricial foram coletados em nove tensiômetros colocados conveniente tanto ao longo como na profundidade da encosta, como mostrado na Figura 1, isto é, os tensiômetros 2, 11, 19, localizados na cume da encosta, que conforme o experimento de Koide (1990), encontram-se a profundidades de 22 cm, 38 cm, 67 cm, respectivamente, os tensiômetros 5, 14 e 20, localizados bem no centro da encosta, com profundidades de 18, 51 e 75 cm, respectivamente, e finalmente, os tensiômetros 8, 17 e 21, localizados na jusante da encosta, com profundidades de 17, 44 e 65 cm, respectivamente.

Os dados observados de vazões subsuperficiais foram coletados na base da encosta.

O evento de chuva durou 84 horas, sendo que a chuva total depende de duas parcelas de chuva, essas são, a chuva que escorre pelos troncos e a chuva não interceptada pelas árvores (KOIDE, 1990).

A discretização do domínio físico foi imposta pelo MEF em elementos finitos triangulares como mostrados na Figura 1. Foram utilizados 98 nós e 156 elementos finitos triangulares. Nessa discretização, encontram-se identificados os nove tensiômetros que no jargão da calibração automática são denominados de “pontos de controle”.



**Figura 1.** Estudo de caso de encosta hidrológica, vista bidimensional e discretização do domínio físico em elementos finitos do MEF (adaptado de Koide, 1990).

## CONDIÇÕES DE CONTORNO

Os contornos do domínio físico são atribuídos para condições de potenciais e vazão conhecidas nas bordas.

A base da encosta hidrológica é considerada impermeável com vazão subsuperficial zero.

## MODELO INVERSO

Sobre o estado-de-arte em métodos inversos e algoritmos de otimização, esses encontram-se entre os elementos revolucionários científicos. Essas técnicas têm como fim

fazer um ajuste entre os dados simulados e dados obtidos em laboratório através de uma função objetivo. A entrada de tentativa-erro de parâmetros de entrada resulta fundamental. Por isso, que a entrada de dados é entregue a métodos estocásticos de algoritmos de otimização. Segundo a literatura, os algoritmos de otimização partem da observância de sistemas complexos. Como foi mencionado, Agüero-Martinez e Reis (2017) propuseram mecanismos de comparação de diversos algoritmos de otimização na sua condição multiobjetiva. Dentre as conclusões desses autores, ressalta-se que existem diferenças na forma em que cada algoritmo otimiza os parâmetros de um modelo. Isto é, a forma estocástica de abordagem do sistema complexo tais como o enxame de partículas do MOPSO e da mudança dos códigos binários do NSGA, por exemplo, cria processos de convergência próprios ainda em fase de estudo, devido que ainda esses métodos não foram comparadas plenamente para fenômenos físicos do solo insaturado.

## ALGORITMO MOPSO

Kennedy e Eberhart (1997) propuseram um algoritmo conhecido como PSO (*Particle Swarm Optimization* do Inglês), que é baseado no comportamento de cambadas de animais ou bando de pássaros.

O algoritmo itera continuamente até atingir uma avaliação de uma Função Objetivo (FO).

O MOPSO (*MultiObjective Particle Swarm Optimization* do Inglês) é a versão multiobjetiva do PSO.

A essa versão foi adotado o conceito de frente de Pareto que determina uma curva com as possíveis respostas que maximizam ou minimizam as várias Funções Objetivo (Alvarez-Benitez, 2005).

## FUNÇÃO OBJETIVO (FO)

Neste trabalho, foram utilizadas duas FO.

A primeira FO denominada de FO1 visou maximizar a eficiência estabelecida por Nash e Sutcliffe (1970), formulada assim:

$$FO1 = \max \left( 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (\Psi_{obs,i} - \Psi_{sim,i})^2}{\sum_{i=1}^n (\Psi_{obs,i} - \bar{\Psi}_{obs,i})^2} \right) \quad (5)$$

onde:  $\psi_{obs}$  representa os dados observados de potenciais matriciais,  $\psi_{sim}$  são os potenciais matriciais simulados;  $n$  a quantidade de observações ao longo do tempo, e;  $\bar{\psi}_{obs}$  a média de dados observados de potenciais matriciais.

A segunda FO denominada de FO2 foi formulada de maneira similar à anterior, mas em termos de vazão subsuperficial, como segue:

$$FO2 = \max \left( 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (Q_{obs,i} - Q_{sim,i})^2}{\sum_{i=1}^n (Q_{obs,i} - \bar{Q}_{obs,i})^2} \right)$$

(6)

onde:  $Q_{obs}$  representa os dados observados de vazões subsuperficiais,  $Q_{sim}$  são os dados simulados de vazões subsuperficiais;  $n$  a quantidade de observações ao longo do tempo, e;  $\bar{Q}_{obs}$  a média de dados observados de vazões subsuperficiais.

### 3. RESULTADOS

O estudo foi limitado à determinação de cinco parâmetros por camada:  $n$ ,  $\alpha$ ,  $Ks$ ,  $\theta_s$  e  $\theta_r$ , totalizando 20 parâmetros a serem determinados.

O MOPSO foi utilizado, primeiramente, com um “enxame” de 10 “partículas” em 10 “viagens”, segundo o jargão matemático, que daqui para frente serão denominadas de “iterações de 10 x 10”.

A curva de Pareto aproximada composta por sete pontos, que daqui para gente serão denominados de “par-ordenado-resposta”, é mostrada na parte direita da Figura 2.

O primeiro patamar dos “par-ordenado-resposta” da curva de Pareto, segundo a Figura 2, foi o valor de 0,8, na escala de 0 para 1, no eixo das abcissas (FO1) que representa o grau de ajuste dos potenciais matriciais no espaço e no tempo.

O segundo patamar, foi o valor de 0,4, no eixo das ordenadas (FO2) indicando o ajuste de vazões subsuperficiais em todo o domínio físico e em um tempo de 84 horas.

O tempo de cômputo em um computador Intel i3 e 2 gigabytes foi de quatro dias.

A parte central e parte esquerda da Figura 2 apresentam as outras frentes de Pareto, com iterações de 30 x 30 e iterações de 50 x 50, respectivamente, sendo o tempo de cômputo abrangido de sete e 20 dias, respectivamente.

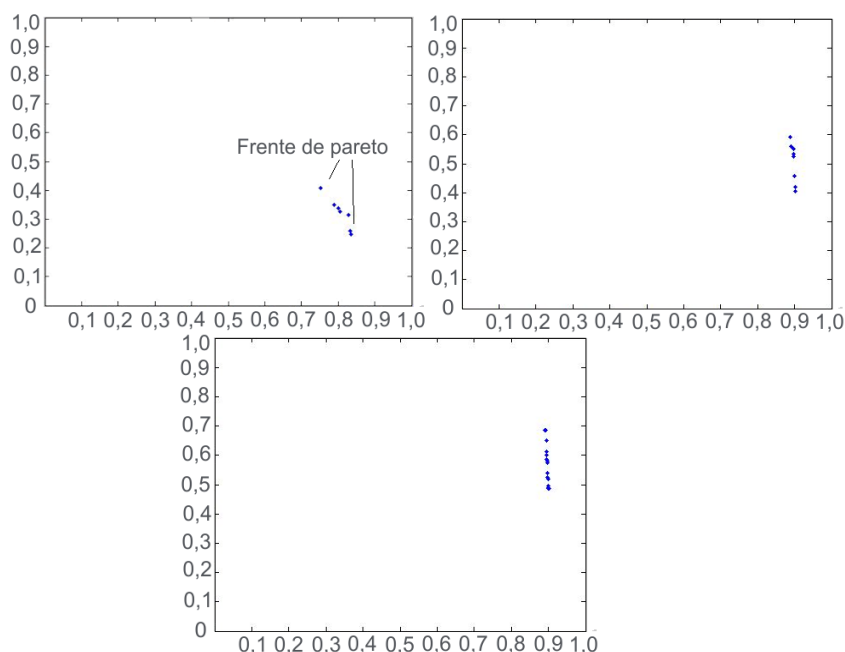
O patamar máximo do ajuste da FO2 (vazões subsuperficiais) foi de 0,7 contra 0,9 do ajuste da FO1 (potenciais matriciais).



O valor de ajuste da FO2 indica uma grande dificuldade de ajuste das vazões subsuperficiais por parte do modelo proposto, enquanto que, o valor de ajuste de 0,9 da FO1 mostra uma melhor performance do modelo proposto para o ajuste dos potenciais matriciais.

Esses valores podem parecer muito limitados, mas deve-se ter em conta que trata-se de um fenômeno em escala maior, com sérias limitações de hipótese.

A maior dificuldade na performance de ajuste do modelo proposto tem a ver com incertezas de vazões subsuperficiais nas camadas do solo em grande escala, além da heterogeneidade, entre outros.

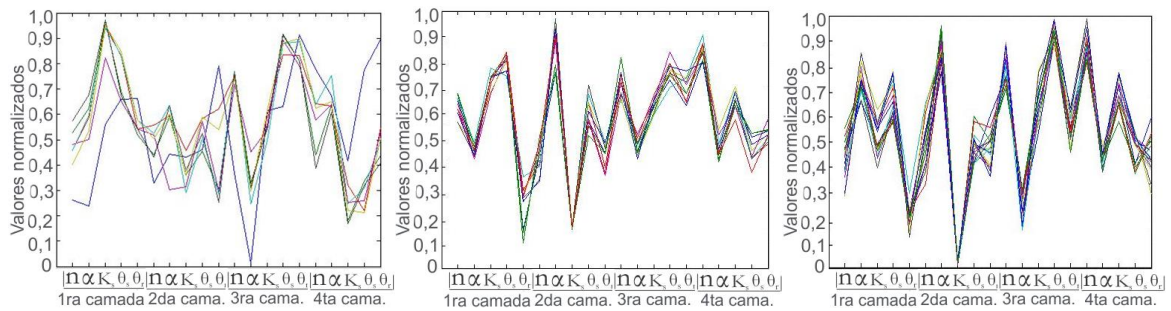


**Figura 2.** Frente de Pareto entre potencial matricial contra fluxo subsuperficial, iterações de 10x10, 30x30, 50x50, respectivamente.

A Figura 3 apresenta a faixa de variação dos parâmetros normalizados dos sete “par-ordenado-resposta” mostrados na Figura 2.

Essa figura mostra que existem algumas diferenças de ajuste entre os pares-ordenado-resposta, mas que tendem a uniformizar-se conforme aumenta o número de iterações.

Isto é, a tendência é para a obtenção de uma só resposta.

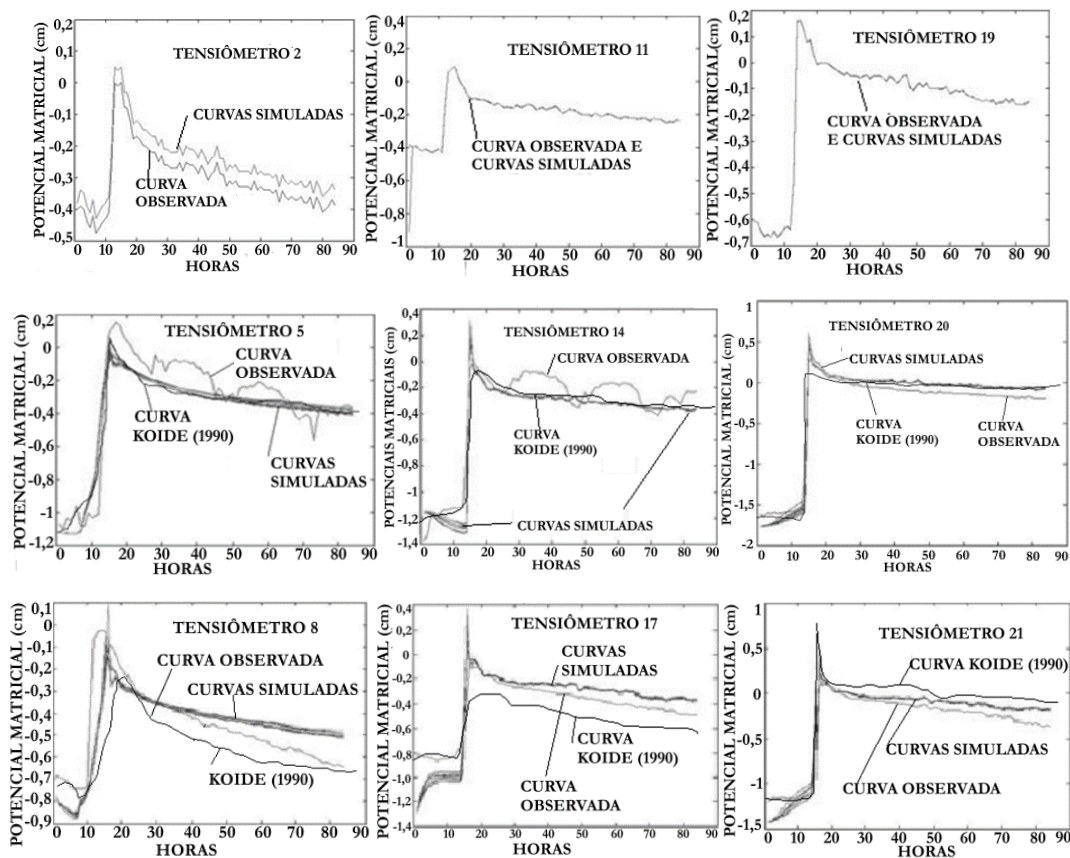


**Figura 3.** Faixa de variação de parâmetros normalizados para as iterações 10x10, 30x30 e 50x50.

Cada “par-ordenado-reposta” da frente de Pareto da Figura 2 representa um conjunto resposta da calibração automática do modelo que simula o fenômeno físico.

Esse conjunto de respostas compõem-se de vinte parâmetros (cinco por cada camada) originando dados simulados de potencial matricial em relação ao tempo (84 horas).

Desse modo, a Figura 4 apresenta a variação de valores de potencial matricial temporal para os nove tensiômetros utilizados no experimento de Koide (1990).



**Figura 4.** Comparação de curvas de potenciais matriciais geradas pelo MOPSO contra os dados observados.

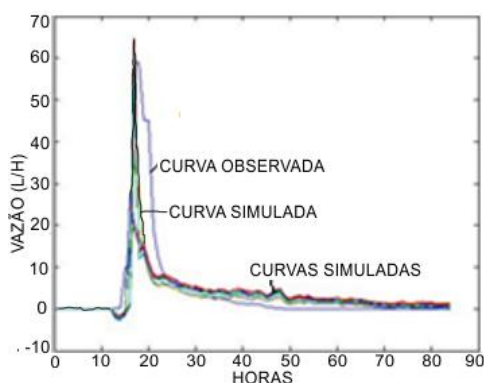
Os três tensiômetros numerados como 2, 11, 19, localizados na cume da encosta (Koide, 1990), com exceção do tensiômetro 2, apresentam um bom ajuste devido a que os dados observados nesses tensiômetros encontram-se perto do contorno, onde as condições iniciais são conhecidas.

Os potenciais matriciais ao longo do tempo dos tensiômetros 5, 14 e 20 (localizados na parte central da encosta, Koide, 1990) apresentam um ajuste razoável dos dados observados de potencial matricial.

Os últimos três tensiômetros 8, 17 e 21 localizados na jusante da encosta divergem dos dados observados de potencial matricial ao longo do tempo.

Essa divergência pode ser atribuída a uma maior limitação dos dados observados das vazões subsuperficiais coletadas na base da encosta, conseqüentemente, encontrando-se respostas simuladas limitadas para o local inferior da encosta e refletidas no baixo valor de patamar de ajuste da Função Objetivo para as vazões subsuperficiais.

A Figura 5 apresenta um ajuste razoável de vazões subsuperficiais simulados em relação às vazões subsuperficiais observadas temporalmente (84 horas). A Figura 5 mostra que a maioria das simulações não atingem os dados observados, com exceção de uma curva simulada, concordando com o valor baixo atingido de ajuste da Função Objetivo de vazão subsuperficial.



**Figura 5.** Comparação de dados observados de vazões subsuperficiais temporais contra os dados simulados.

## 5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho apresenta a utilidade do modelo proposto de calibração automática em um fenômeno físico em escala maior com resultados parciais, pois não se determina com precisão os efeitos de incerteza das propriedades do solo.

Apesar das pesadas hipóteses impostas para funcionamento do modelo matemático, esse não deixa de ser uma alternativa às análises de fenômenos físicos.

Os procedimentos propostos à luz das pesquisas atuais resultam relevantes, pois trata-se de um experimento em escala maior, onde é difícil a obtenção de dados, e aumenta o grau de incerteza.

O MOPSO apresentou uma razoável adaptabilidade ao modelo proposto, contudo, é necessário utilizar outros algoritmos de índole multiobjetivo, com o propósito de comparação e análise de resultados.

O tempo consumido de vinte dias indica a necessidade de maior poder computacional.

Espera-se no futuro a aplicação do modelo proposto para outros fenômenos físicos em escala maior para elucidar com maior critério os efeitos de incerteza.

## REFERÊNCIAS

AGHAJANI, G.; GHADIMI, N. Multi-objective Energy Management in a Micro-grid. Energy ports, **Elsevier**, v. 4, p. 218-225, 2018.

AGUERO-MARTINEZ, D. S.; REIS, D. S. **Evaluation of Multiobjective Optimization Algorithms in Calibration of Hydrologic Models Using Proposed Metrics**. In: World Environmental and Water Resources Congress. Sacramento, California, USA. p. 683, 2017.

ALVAREZ-BENITEZ, J. E.; EVERSON, R. M. e FIELDSEND, J. E. **A MOPSO algorithm based exclusively on pareto dominance concepts**. In: Evolutionary Multi-Criterion Optimization, EMO, Proceedings of Third International Conference, Guanajuato, Mexico, p. 459–473, 2005.

ESFE, M. H.; HAJMOHAMMAD, M. H.; WONGWISES, S. Pareto Optimal Design of Thermal Conductivity and Viscosity of NDCo3O4 Nanofluids by MOPSO and NSGA II using Response Surface Methodology. **Current Nanoscience**, v. 14, n. 1, 2018.

FULLHART, A.; KELLENNERS, T.; CHANDLER, D.; McNAMARA, J.; SEYFRIED, M. Water Flow Modeling with Dry Bulk Density Optimization to Determine Hydraulic Properties in Mountain Soils. **Soil Science Society of America Journal – Soil Physics & Hydrology**, v. 82, n. 1, p. 31-44, 2017.

GUANG-YU, Z.; LI-JUN, H.; XUE-WEI, J.; WEI-BO, Z. A fitness assignment strategy based on the grey and entropy parallel analysis and its application to MOEA. **European Journal of Operational Research**, v. 265, n. 3, p. 813-828, 2018.

HAN, X.; LIU, J.; MITRA, S.; LI, X.; SRIVASTAVA, P.; GUZMAN, S.; XHEN, X. Selection of Optimal Scales for Soil Depth Prediction on Headwater Hillslopes: A Modelling Approach. **Elsevier**, v. 163, p. 257-275, 2018.

HARRIS, N.; SMETTEM, K.; KLAUS, J.; GORELICK, S. **Identifying Controls on Saturated Flow Pathways and Hillslope-riparian Zone Residence Times using a combination of Tracers, Borehole Monitoring and Groundwater Modeling.** In: Egu General Assembly. University of Southampton Institutional Repository. <<https://eprint.soton.ac.uk/id/eprint/418243>>, 2018.

KENNEDY, J. e EBERHART, R.C. **A discrete binary version of the particle swarm algorithm.** In: Conference on Systems, Man, and Cybernetics. Computational Cybernetics and Simulation, IEEE international, Orlando, FL, USA, 1997.

KOIDE S. **Hillslope Subsurface Flow Study by Finite Element Method.** Ph.D. thesis, University of London, London, Inglaterra, 1990.

NASH, J. E. e SUTCLIFFE, J. V. River flow forecasting through conceptual models part I — A discussion of principles. **Journal of Hydrology**, v. 10, n. 3, p. 282–290, 1970.

RICHARDS, L.A. Capillary conduction of liquids in porous mediums. **Physics**, v. 1, n. 318, p. 333, 1931.

VAN GENUCHTEN, M. Th. A closed-form equation for predicting the hydraulic conductivity on unsaturated soils. **Soil Science Society American Journal**, v. 44, p. 892–898, 1980.

WÖHLING, T.; VRUGT, J.; BARKLE, G. Comparison of Three Multiobjective Optimization Algorithms for Inverse Modeling of Vadose Zone Hydraulic Properties. **Soil Science Society of America Journal**, v. 72, n. 2, p. 305-319, 2008.