

## Estimativa do perfil de temperatura na entrada de dutos via Método de Monte Carlo com Cadeias de Markov

*Estimative of the inlet temperature profile in ducts via Markov Chain Monte Carlo Method*

Gustavo Antunes Guedes<sup>1</sup>, Eduardo Cunha Classe<sup>2</sup>, Diego Campos Knupp<sup>3</sup>, Luiz Alberto da Silva Abreu<sup>4</sup>

### RESUMO

Este trabalho trata do emprego de uma metodologia Bayesiana para solucionar um problema inverso de transferência de calor por convecção forçada em escoamento laminar em regime permanente entre placas paralelas. O problema direto envolve o cálculo das temperaturas ao longo do duto, uma vez que as condições de contorno são especificadas. O problema direto foi resolvido numericamente em uma plataforma computacional, Mathematica, com o método de elementos finitos, aplicando a rotina computacional intrínseca, NDSolve. O problema inverso consiste em estimar o perfil de temperatura de entrada a partir de medições não intrusivas de temperatura, supostamente realizadas via câmeras termográficas. A abordagem Bayesiana adotada para estimar a solução do problema inverso, utiliza o método de Markov Chain Monte Carlo. A precisão da abordagem da solução atual foi examinada usando medições simuladas de temperatura contendo ruído de medição aleatório e diferentes perfis de temperatura de entrada. Os resultados se mostraram acurados e precisos, para todos os casos testados.

**Palavras-chave:** Convecção Forçada, Problemas Inversos em Transferência de Calor, Inferência Bayesiana, Cadeias de Markov e Monte Carlo

### ABSTRACT

This work deals with the employment of a Bayesian methodology to solve an inverse problem in forced convective heat transfer in steady state laminar flow between parallel plates. The direct problem involves calculating temperatures along the duct once boundary conditions are specified. The direct problem was numerically solved in a computational platform, Mathematica, with the finite element method, by applying the NDSolve tool. The inverse problem consists of estimating the inlet temperature profile from non-intrusive temperature measurements, supposedly taken by using an infrared camera. The Bayesian approach taken to estimate the inverse problem solution, uses a Markov Chain Monte Carlo method. The accuracy of the present solution approach was examined by using simulated measurements, containing random noises, and considering some inlet test temperature profiles. The results were accurate and precise for all test cases.

**Keywords:** Forced Convection, Inverse Heat Transfer Problem, Bayesian Inference, Markov Chain Monte Carlo

<sup>1</sup> Engenheiro Mecânico.  
Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Instituto Politécnico.

E-mail:  
gustavo\_a\_guedes@outlook.com  
ORCID: 0000-0001-8764-8093

<sup>2</sup> Engenheiro Mecânico.  
Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Instituto Politécnico.

E-mail:  
eduardo.classe@iprj.uerj.br  
ORCID: 0000-0002-2405-3946

<sup>3</sup> Doutor em Engenharia Mecânica. Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Instituto Politécnico.

E-mail: diegoknupp@iprj.uerj.br  
ORCID: 0000-0001-9534-5623

<sup>4</sup> Doutor em Engenharia Mecânica. Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Instituto Politécnico.

E-mail: luiz.abreu@iprj.uerj.br  
ORCID: 0000-0002-7634-7014

## 1. INTRODUÇÃO

A estimativa da condição de temperatura de entrada em escoamento forçado em dutos tem grande importância em diversos problemas de engenharia. Nem sempre é possível medir diretamente a temperatura na entrada do duto, embora esta informação possa ser necessária no monitoramento de equipamentos e processos (SHAH, LONDON, 1978; BOKAR, ÖZISIK, 1995; ÖZISIK e ORLANDE, 2021).

Em um contexto mais geral, a medição direta de propriedades termofísicas, funções com variação espacial ou temporal envolvendo fluxos de calor, coeficientes de troca térmica etc., muitas vezes pode não ser viável ou possível, devido à diversos possíveis fatores, como geometria do sistema, altas temperaturas, riscos operacionais etc. (MOTTA et al., 2010; ÖZISIK e ORLANDE, 2021). Uma alternativa nestes casos é o uso técnicas de medição indireta (ORLANDE; FUDYM, 2017; PHATAK et al., 2018). Neste trabalho, estas medições indiretas, que podem ser denominadas como soluções de problemas inversos (ÖZISIK e ORLANDE, 2021), referem-se às medições de temperatura sendo tomadas em locais específicos afastados da posição de entrada da tubulação, com objetivo de obtenção das medições na entrada, mas de forma a não interferir de forma intrusiva naquela região (BOKAR, ÖZISIK, 1995; LIU E ÖZISIK, 1996); PARWANI et al., 2012; ÖZISIK e ORLANDE, 2021).

Problemas inversos apresentam importante e extensa aplicabilidade em engenharia e nas ciências em geral. Na literatura há uma vasta quantidade de trabalhos voltados para o meio industrial, como estudos para turbinas de vento, análise de meios compostos, temperaturas de entrada, entre outros (PARWANI et al., 2015, ÖZISIK e ORLANDE, 2021). Recentemente, estas técnicas veem sendo amplamente utilizadas em estudos que envolvem biotransferência de calor (ÖZISIK e ORLANDE, 2021; AGHAYAN et al., 2013; ALAEIAN; ORLANDE, 2017; LOIOLA; ORLANDE; DULIKRAVICH, 2018), como a detecção de tumores de pele conforme descrito em (ROJCZYK et al., 2015; ROJCZYK et al., 2017), análise de dano térmico em tecidos tratados por ablação a laser (LOIOLA et al., 2020).

Na literatura encontra-se métodos clássicos como o Método do Gradiente Conjugado para resolver este tipo de problema, mas neste trabalho, propõe-se uma metodologia para a solução do problema inverso num escoamento laminar baseada na inferência Bayesiana, por meio do método de Monte Carlo via Cadeias de Markov. Esta abordagem será aplicada visando a estimativa do perfil de temperatura de entrada num problema envolvendo convecção forçada (ÖZISIK e ORLANDE, 2021; BOKAR, ÖZISIK, 1995).

Na abordagem Bayesiana os parâmetros do problema podem convenientemente serem modelados na forma de variáveis aleatórias onde a incerteza associada a estes parâmetros, e sobre as variáveis observáveis, é pode ser codificada por meio das distribuições de probabilidade das quantidades de interesse (ÖZISIK E ORLANDE, 2021; KAIPIO & SOMERSALO, 2004). Estes métodos são capazes de fornecer soluções precisas, especialmente quando informações *a priori* sobre os parâmetros e funções estão disponíveis e têm se mostrado robustos, inclusive, quando funções descontínuas são estimadas (ÖZISIK E ORLANDE, 2021).

Para fazer inferência sobre a distribuição a posteriori é aplicado o teorema de Bayes via método Monte Carlo com Cadeia de Markov (*Markov Chain Monte Carlo* - MCMC). Nesse método, a distribuição de probabilidade *a posteriori* é estimada via método Metropolis Hastings, que seleciona amostras de uma cadeia de Markov com maior probabilidade de serem estimativas obtidas da distribuição a posteriori, de forma similar aos métodos de aceitação/rejeição. (KAIPIO, FOX, 2011; KAIPIO & SOMERSALO, 2004; ORLANDE, 2012; ROJCZYK et al., 2017; LOIOLA et al., 2020). Este método vem sendo largamente utilizado e entre suas vantagens, destaca-se a forma natural com que uma análise sob incerteza pode ser realizada nestas abordagens (OZISIK E ORLANDE, 2021).

## 2. CONVECÇÃO FORÇADA ENTRE PLACAS PARALELAS

### 2.1 Problema direto

O problema direto consiste em calcular a temperatura em qualquer ponto ao longo do duto, uma vez, definidas as condições de contorno. O modelo matemático considera convecção forçada entre duas placas paralelas, hidrodinamicamente desenvolvida com fluxo laminar termicamente desenvolvido (BOKAR, ÖZISIK, 1995; BEJAN, 2013; SHAH, LONDON, 1978). Ambas as placas estão sujeitas a um fluxo de calor constante deterministicamente conhecido,  $q$ , e a variação transversal da temperatura de entrada é definida pela função  $f(y)$ . As placas paralelas têm comprimento,  $b$ , e  $d$  é a distância entre elas, o perfil de velocidade,  $u(y)$ , é considerado constante.

O problema é modelado supondo estado estacionário, com temperatura,  $T(x, y)$ , variando com as coordenadas espaciais. Assume-se ainda, dissipação viscosa, convecção livre e que os efeitos de condução axial possam ser desprezados bem como a suposição de propriedades físicas constantes. A formulação matemática que descreve este problema de convecção forçada é a seguinte (BOKAR, ÖZISIK, 1995; LIU E ÖZISIK, 1996):

$$k \frac{\partial^2 T(x, y)}{\partial y^2} = u(y) \rho c_p \frac{\partial T(x, y)}{\partial x} \quad 0 < y < h, 0 < x < b \quad (1)$$

$$k \frac{\partial T}{\partial y} = q \quad y = d, 0 < x \quad (2)$$

$$-k \frac{\partial T}{\partial y} = q \quad y = 0, 0 < x \quad (3)$$

$$T(x, y) = f(y) \quad x = 0, 0 \leq y \leq d \quad (4)$$

onde:

$$u(y) = 6u_m \frac{y}{d} \left(1 - \frac{y}{d}\right) \quad (5)$$

Nas equações (1) a (5),  $k$ ,  $\rho$  e  $c_p$ , são a condutividade térmica, densidade e calor específico, respectivamente. Este problema pode ser reescrito, na forma adimensional, como:

$$\frac{\partial^2 \theta(X, Y)}{\partial Y^2} = \frac{U(Y)}{4} \frac{\partial \theta(X, Y)}{\partial X} \quad 0 < Y < 1, 0 < X < L \quad (6)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = Q \quad Y = 1, 0 < X \quad (7)$$

$$-\frac{\partial \theta}{\partial y} = Q \quad Y = 0, 0 < X \quad (8)$$

$$\theta(X, Y) = F(Y) \quad X = 0, 0 \leq Y \leq 1 \quad (9)$$

onde:

$$U(y) = \frac{u(y)}{u_m} = 6Y(1 - Y) \quad (10)$$

Os grupos adimensionais foram definidos como (BOKAR, ÖZISIK, 1995; LIU E ÖZISIK, 1996):

$$\theta(X, Y) = \frac{T(x, y) - T_{ref}}{T_{ref}}, \quad Y = \frac{y}{d}, \quad X = \frac{x}{Pe De}, \quad Re = \frac{u_m De}{\nu}, \quad De = 2d \quad (11-18)$$

$$Pe = Re Pr, \quad L = \frac{b}{Pe De}, \quad Q = \frac{dq}{k T_{ref}}$$

Este problema direto foi solucionado utilizando a plataforma Mathematica, na qual a ferramenta NDSolve foi utilizada para obter a solução numérica das equações diferenciais. Os resultados foram verificados resolvendo numericamente o problema com um método de diferenças finitas clássico.

### 3. PROBLEMA INVERSO

O problema inverso neste trabalho consiste em estimar o perfil de temperatura de entrada a partir de medições não intrusivas a jusante, o que pode ser resolvido utilizando uma variedade de técnicas determinísticas ou estocásticas conforme está descrito na literatura (ORLANDE, 2012; RAGHUNATH, 1993; ÖZISIK E ORLANDE, 2021). A maioria dos métodos encontrados na literatura para solução de problemas inversos convectivos, principalmente de estimativa de funções, não se baseia em métodos Bayesianos onde pode-se considerar a modelagem de informações *a priori* sobre as incertezas dos parâmetros desconhecidos. Para que a informação *a priori* seja considerada é necessária uma estrutura Bayesiana (KAPIO, SOMERSALO, 2005). Além disso, o problema inverso tratado neste trabalho não foi resolvido via método de Monte Carlo via Cadeias de Markov ou similar e, portanto, nenhum método que leve em conta as incertezas dos parâmetros ou que permita a análise sob incerteza das soluções obtidas foi empregado.

A formulação do problema inverso neste trabalho será definida de forma a encontrar a função densidade de probabilidade posterior, que é a probabilidade condicional dos parâmetros dados as medições. Isso é possível expressando a verossimilhança das medições, ou seja, a probabilidade condicional de obter as medições dados os parâmetros, bem como as informações *a priori* sobre os parâmetros, como funções de densidade de probabilidade. O Teorema de Bayes é o seguinte (ÖZISIK E ORLANDE, 2021; KAPIO & SOMERSALO, 2004):

$$\pi_{posterior}(\mathbf{P}) = \pi(\mathbf{P}|\mathbf{Y}) = \frac{\pi_{prior}(\mathbf{P})\pi(\mathbf{Y}|\mathbf{P})}{\pi(\mathbf{Y})} \quad (19)$$

Neste teorema,  $\pi_{posterior}(\mathbf{P})$  é a probabilidade posterior dos parâmetros  $\mathbf{P}$ , dadas as medidas  $\mathbf{Y}$ ,  $\pi_{prior}(\mathbf{P})$ , é a probabilidade *a priori*, que é o modelo para a informação *a priori* sobre os parâmetros,  $\pi(\mathbf{Y}|\mathbf{P})$ , é a função de verossimilhança das medidas  $\mathbf{Y}$ , dado o vetor de parâmetros  $\mathbf{P}$ , enquanto  $\pi(\mathbf{Y})$  é a probabilidade marginal das medições que serve como constante normalizadora (ÖZISIK E ORLANDE, 2021; KAPIO & SOMERSALO, 2004). Ao

considerar um caso onde há informação prévia sobre os parâmetros, a probabilidade *a priori* pode ser modelada como uma distribuição gaussiana, com média e covariância conhecidas, sendo expressa como,

$$\pi_{prior}(\mathbf{P}) = (2\pi)^{\frac{N}{2}} |\mathbf{V}|^{-\frac{1}{2}} \exp \left[ -\frac{1}{2} (\mathbf{P} - \boldsymbol{\mu})^T \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{P} - \boldsymbol{\mu}) \right] \quad (20)$$

onde  $N$  é o número de parâmetros,  $\mathbf{V}$  é matriz covariância dos parâmetros e  $\boldsymbol{\mu}$  é o vetor de média dos parâmetros supostamente conhecidos. Assumindo que há erros de medição com distribuição gaussiana, média zero e desvio padrão conhecido nos dados experimentais, assumindo um vetor contendo  $M$  medições, e matriz covariância  $\mathbf{W}$ , e ainda que esses erros são independentes dos parâmetros, a probabilidade das medições é expressa como (ÖZISIK E ORLANDE, 2021; KAIPIO & SOMERSALO, 2004):

$$\pi(\mathbf{Y}|\mathbf{P}) = (2\pi)^{\frac{M}{2}} |\mathbf{W}|^{-\frac{1}{2}} \exp \left[ -\frac{1}{2} (\mathbf{Y} - \boldsymbol{\theta}(\mathbf{P}))^T \mathbf{W}^{-1} (\mathbf{Y} - \boldsymbol{\theta}(\mathbf{P})) \right] \quad (21)$$

em que  $\mathbf{Y}$ , é um vetor contendo as medidas (adimensionalizadas considerando o grupo de números adimensionais) e  $\boldsymbol{\theta}(\mathbf{P})$ , é um vetor contendo a solução do problema direto, e nele as temperaturas são calculadas nas mesmas coordenadas espaciais em que essas medições foram realizadas, dados os parâmetros  $\mathbf{P}$ . Com ambas as funções de verossimilhança, e a de probabilidade *a priori*, a probabilidade a posteriori pode ser estimada. No método de Monte Carlo via Cadeias de Markov, candidatos aleatórios são gerados para os parâmetros, e esses candidatos podem ser aceitos ou rejeitados com base na probabilidade posterior de outros candidatos. Foi utilizado neste trabalho, na implementação do método de Monte Carlo via Cadeias de Markov, o algoritmo de Metropolis-Hastings (MH) (KAIPIO, SOMERSALO, 2005; KAIPIO, FOX, 2011; ORLANDE, 2012).

A cadeia de Markov gerada pelo algoritmo, uma vez convergida, representa a distribuição posterior dos parâmetros. Os estados iniciais da cadeia de Markov, antes da convergência, são conhecidos como *burn-in period* e são descartados, para que apenas a distribuição que convergiu para a distribuição a posteriori permaneça. Esta distribuição a posteriori pode ser utilizada para obter o valor estimado de cada parâmetro e para realizar análise sob incerteza e outras análises estatísticas sobre as estimativas obtidas tendo o conhecimento da média e do intervalo de credibilidade associado às estimativas obtidas (KAIPIO, FOX, 2011).

## 4. RESULTADOS

Os resultados apresentados nesta seção foram obtidos por meio de rotinas computacionais implementadas na plataforma Mathematica em um sistema operacional Windows 10 com processador Intel® Core™ i5 com 2,5GHz e 8Gb de memória RAM. A equação diferencial associada ao problema direto foi resolvida utilizando a função intrínseca NDSolve do Mathematica, que faz uso do método de Elementos Finitos.

O escoamento do fluido foi simulado para as mesmas características consideradas por LIU E ÖZISIK (1996), visando a análise dos resultados da abordagem Bayesiana proposta neste artigo em relação à abordagem clássica do artigo original de 1996 que utilizou uma metodologia clássica via Método do Gradiente Conjugado.

Nos resultados apresentados, supõe-se um fluxo de ar com velocidade média  $u_m = 2,5$  cm/s, em um duto de placas paralelas, com distância  $d = 12,8$  cm entre duas placas de comprimento  $b = 63,5$  cm. O fluxo de calor nas condições de contorno de ambas as placas é deterministicamente conhecido,  $q = 500$  W/m<sup>2</sup>. Considerou-se ainda as seguintes propriedades termofísicas:  $\rho = 1,1614$  kg/m<sup>3</sup>,  $\mu = 1,858 \times 10^{-5}$  kg/(m s),  $c_p = 1007$  J/(kg K) e  $26,5 \times 10^{-3}$  W/(m K). A temperatura de referência foi considerada de  $T_{ref} = 20^\circ\text{C}$ . Os valores destes adimensionais confirmam as hipóteses tomadas na formulação do problema. A magnitude do número de Reynolds,  $Re = 400$ , indica o regime laminar do escoamento, enquanto a magnitude do número de Péclet,  $Pe = 284$ , indica a dominância do fenômeno de convecção. Pode-se calcular ainda com os grupos adimensionais definidos:  $Pr = 0,71$ ,  $L = 0,00873292$  e  $Q = 7,54717$ . Onde  $Pr$  é o número de Prandtl.

Para gerar os dados experimentais sintéticos em todos os casos foram considerados 18 sensores distribuídos uniformemente entre as placas para aquisição de medições simuladas de temperatura, todos posicionados a uma posição de  $X = L/2$  em relação à entrada. Estas medições foram simuladas de forma a corresponder adequadamente à função de verossimilhança adotada, ou seja, adicionando ruído aleatório Gaussiano às soluções dos problemas diretos, que foram solucionados por meio do método de diferenças finitas a fim de evitar o chamado crime inverso (ÖZISIK E ORLANDE, 2021; KAPIO & SOMERSALO, 2004). Na estimativa de função, assume-se 9 parâmetros a serem estimados, que correspondem à valores discretos da função de temperatura de entrada. O primeiro parâmetro está na posição  $Y = 0$  e o último em  $Y = 1$  e todos os parâmetros são espaçados uniformemente.

Primeiramente, no CASO 1, uma função suave para a temperatura de entrada, será analisada. Considerou-se um desvio padrão controlado e conhecido igual a 2,5% do valor máximo da função de entrada a ser estimada. Inicialmente, assume-se que há conhecimento prévio sobre a condição de temperatura de entrada, e este conhecimento é modelado como uma distribuição normal, com  $\sigma_p = 5\%$ , centrada nos valores exatos. A estimativa dada pelo método nestas condições é mostrada na Figura 1.

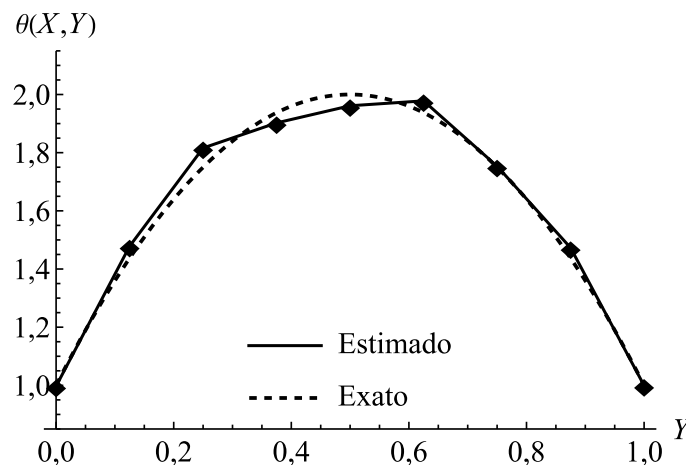


Figura 1 – Função exata e estimada utilizando *priori* Gaussiana para o CASO 1.

A Figura 1 mostra a estimativa da função, obtida pelo conjunto de estados convergidos da cadeia de Markov, que totalizaram 25000 estados. Os primeiros 5000 estados foram descartados por ainda não terem convergidos para a posteriori e corresponderem, portanto, ao denominado *burn-in period* (ÖZISIK E ORLANDE, 2021; KAIPIO & SOMERSALO, 2004). As Figuras 2 e 3 mostram a evolução da cadeia de Markov e o respectivo histograma da parte convergida para duas posições discretas estimadas.

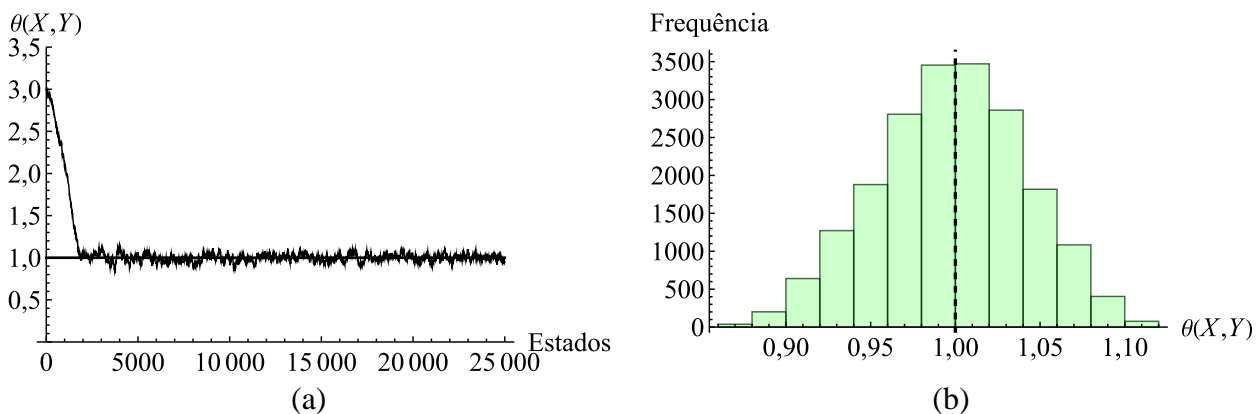
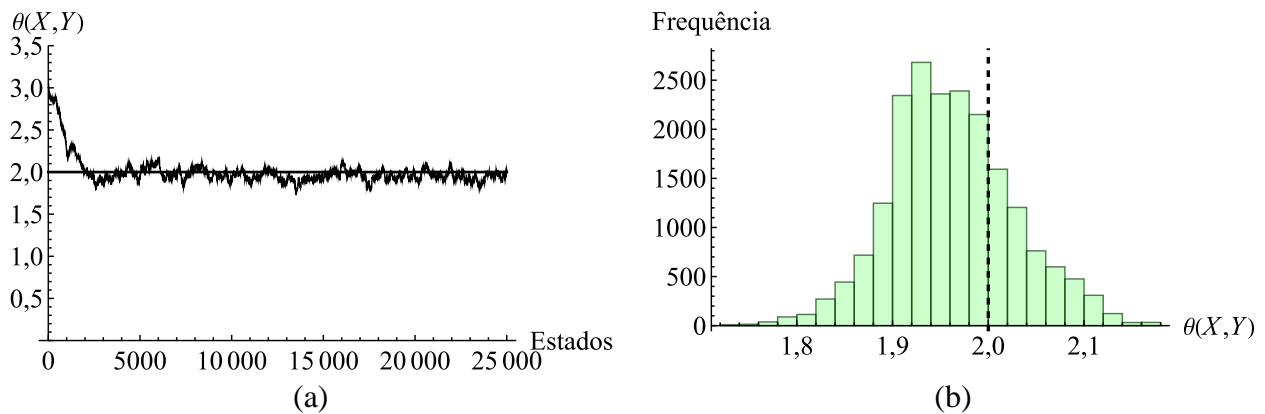


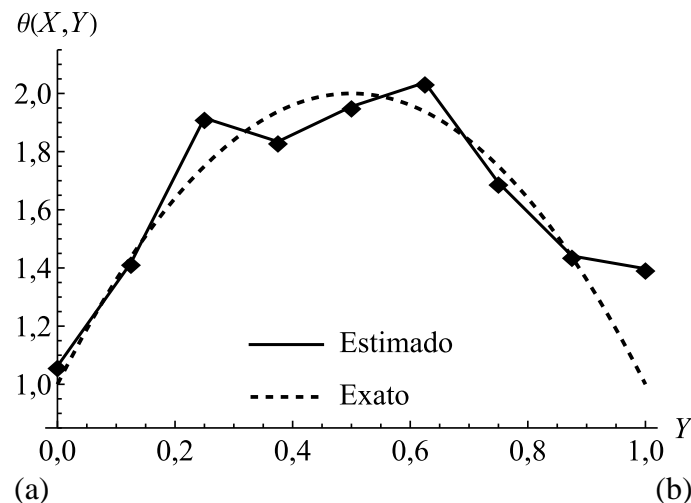
Figura 2 – CASO 1: Cadeia de Markov (a) e Histograma (b), ambos relacionados à temperatura de entrada em  $Y = 0$ .





**Figura 3** – CASO 1: Cadeia de Markov (a) e Histograma (b), ambos relacionados à temperatura de entrada em  $Y = 0,5$ .

O método obteve uma estimativa graficamente acurada do perfil de temperatura de entrada, conforme se observa na Figura 1, mas a hipótese de ter uma informação prévia tão informativa sobre a temperatura de entrada não é comum e, portanto, pouco realista. Por esta razão, os mesmos dados experimentais foram usados para estimar num segundo CASO 2 as temperaturas de entrada no novo caso, agora assumindo que não há nenhum conhecimento prévio sobre o perfil de temperaturas de entrada. Os resultados são mostrados na Figura 4.



**Figura 4** – Função exata e estimada para o CASO 2, *sem priori*.

Quando nenhuma informação prévia é fornecida, a estimativa depende apenas dos dados experimentais, e assim o carácter mal posto do problema tende a gerar maior dificuldade na obtenção de boas estimativas. Em casos como esses, a função tende a ser mais difícil de estimar, e as cadeias de Markov podem levar mais tempo para convergir ou nem mesmo convergirem acuradamente para os valores exatos esperados (ver Figuras 5 a 6), especialmente se um parâmetro, que corresponde a um ponto da função discretizada, estiver localizado em uma condição de contorno ou numa descontinuidade.

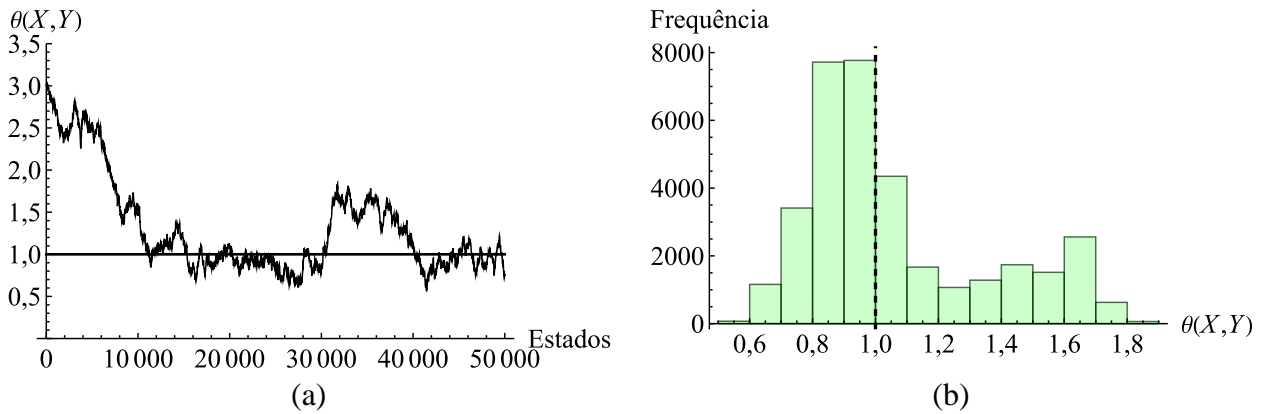


Figura 5 – CASO 2: Cadeia de Markov (a) e Histograma (b), ambos relacionados à temperatura de entrada em  $Y = 0, 0$ .

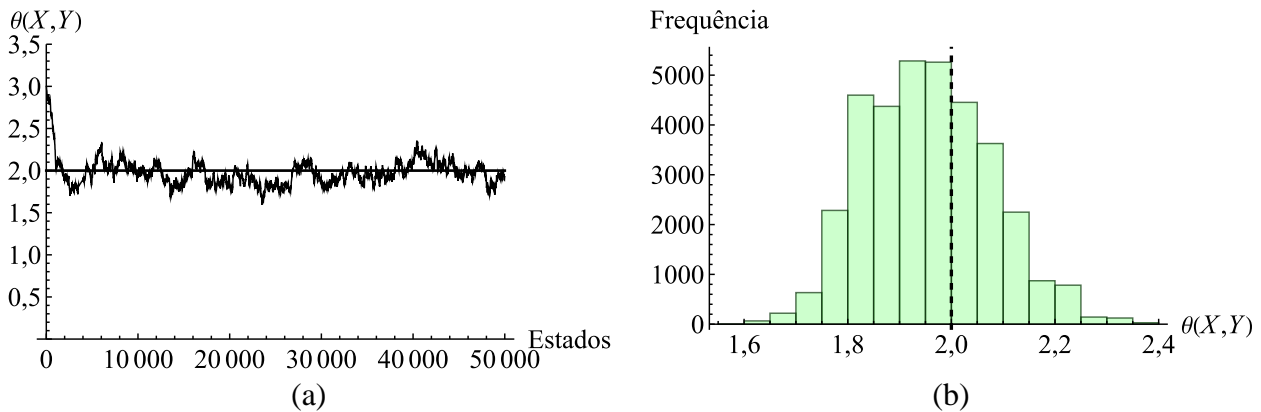


Figura 6 – CASO 2: Cadeia de Markov (a) e Histograma (b), ambos relacionados à temperatura de entrada em  $Y = 0, 5$ .

Em seguida, no CASO 3, uma função degrau é definida e estimada (Figura 10) como a condição de entrada, uma vez que este método é especialmente eficaz em relação a outros métodos clássicos quando se deseja estimar funções descontínuas ou funções do tipo degrau, que são tipicamente tipos desafiadores de funções, especialmente para os métodos determinísticos.

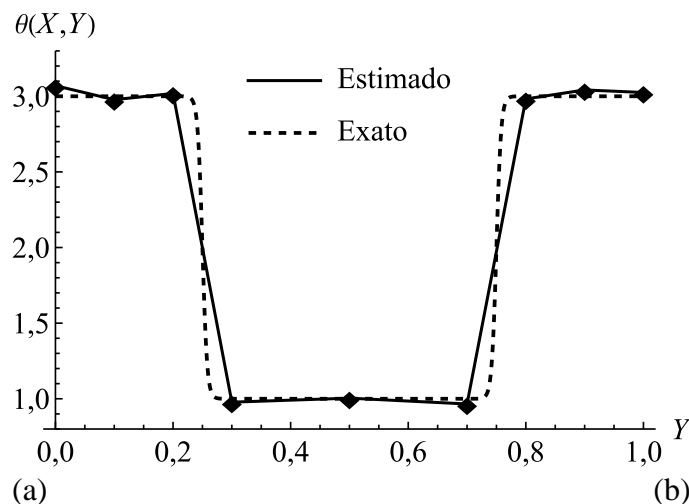
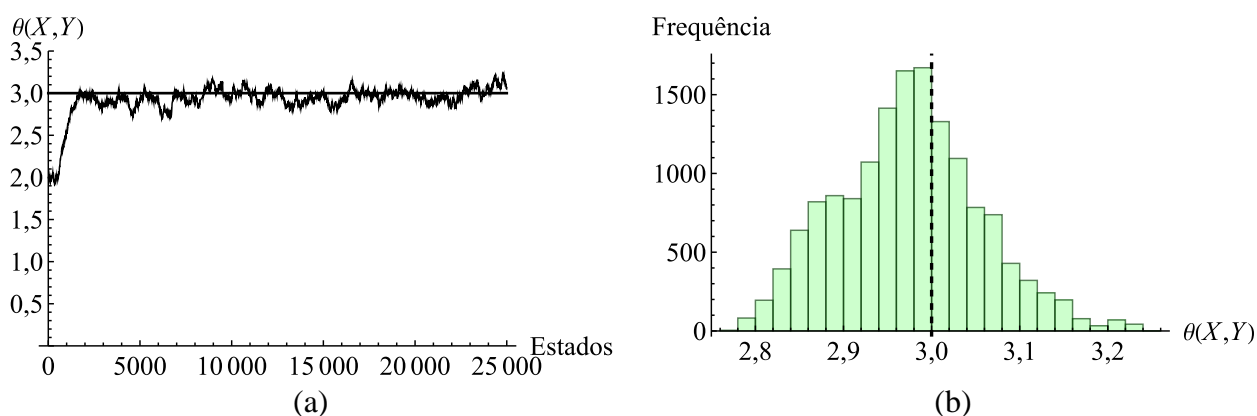
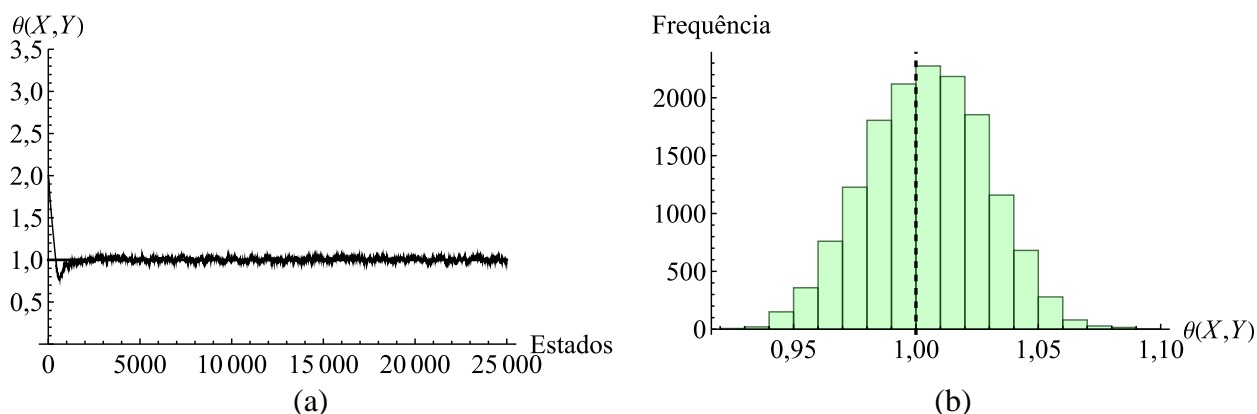


Figura 7 – Função degrau da temperatura de entrada com informação *a priori*, CASO 3.

Novamente, a fim de examinar a solução para quando informações a priori estão disponíveis, supõe-se inicialmente que informações prévias possam ser utilizadas com desvio padrão de 5% em torno do valor exato e neste caso os parâmetros estimados como esperado foram muito próximos das temperaturas de entrada exatas que foram utilizadas na geração das medições simuladas. As cadeias de Markov convergiram para os valores corretos, mesmo nos contornos e também em pontos próximos da descontinuidade, como mostra a Figura 8 a 9.



**Figura 8** – CASO 3: Cadeia de Markov (a) e Histograma (b), ambos relacionados à temperatura de entrada em  $Y = 0, 0$ .



**Figura 9** – CASO 3: Cadeia de Markov (a) e Histograma (b), ambos relacionados à temperatura de entrada em  $Y = 0, 5$ .

Em seguida, no CASO 4, como sabe-se que uma *priori* altamente informativa raramente está disponível, portanto, um caso sem informações prévias sobre as temperaturas de entrada também poderia ser testado. Entretanto, para funções descontínuas os resultados sem nenhuma *priori* não são acurados, dado o carácter mal posto do problema inverso em questão. Assim, uma *priori* do tipo não informativa (ou pouco informativa) de variação total (Total Variation) foi aplicada, de forma a regularizar a solução (ÖZISIK E ORLANDE, 2021; KAIPIO & SOMERSALO, 2004).

Nesta priori, o parâmetro de regularização,  $\gamma$ , foi tomado como 100 e foi escolhido após testes numéricos que mostrassem soluções regularizadas (ÖZISIK E ORLANDE, 2021; KAIPIO & SOMERSALO, 2004).

O resultado da estimativa é mostrado na Figura 10. Neste caso, nem todos os parâmetros convergiram para um valor acurado com a temperatura exata de entrada, especialmente nos contornos onde a priori *total variation function* não atua diretamente na regularização (ÖZISIK E ORLANDE, 2021; KAIPIO & SOMERSALO, 2004). Desta forma, os parâmetros localizados nas fronteiras ou próximos às discontinuidades permaneceram próximos aos seus estados iniciais. Os outros parâmetros convergiram para valores próximos da solução exata. As cadeias de Markov são mostradas na Figura 11 e Figura 12.

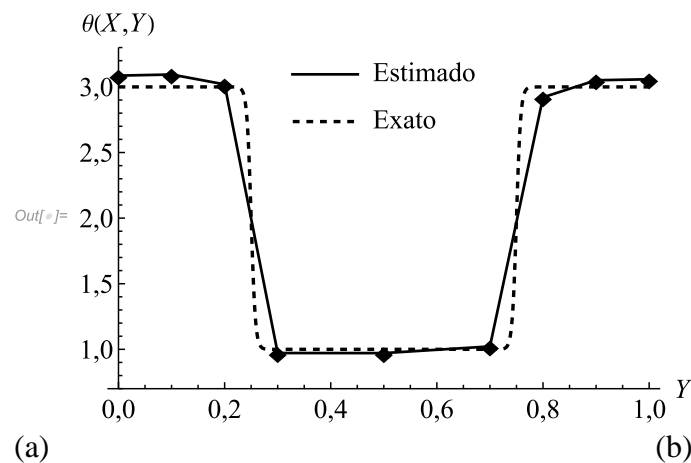


Figura 10 – Função degrau da temperatura de entrada sem informação *a priori*, CASO 4.

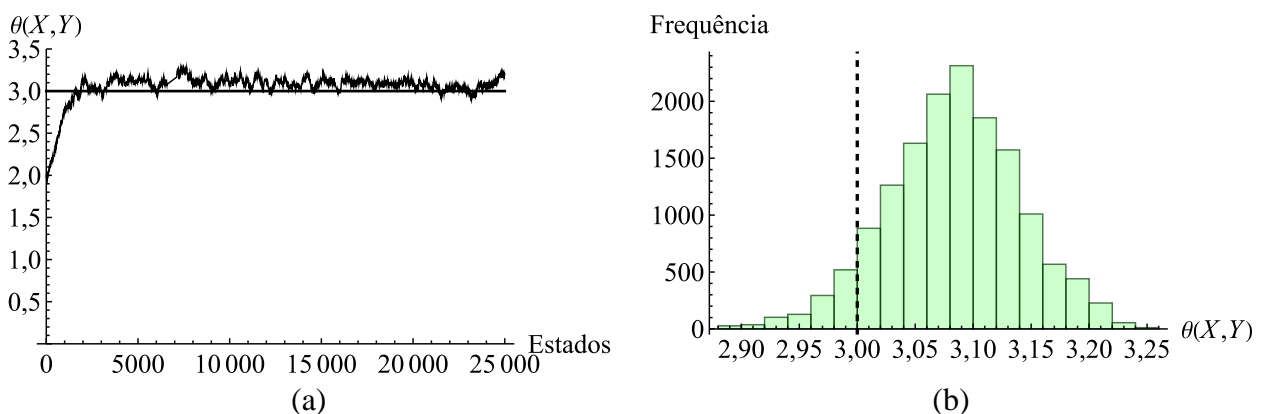
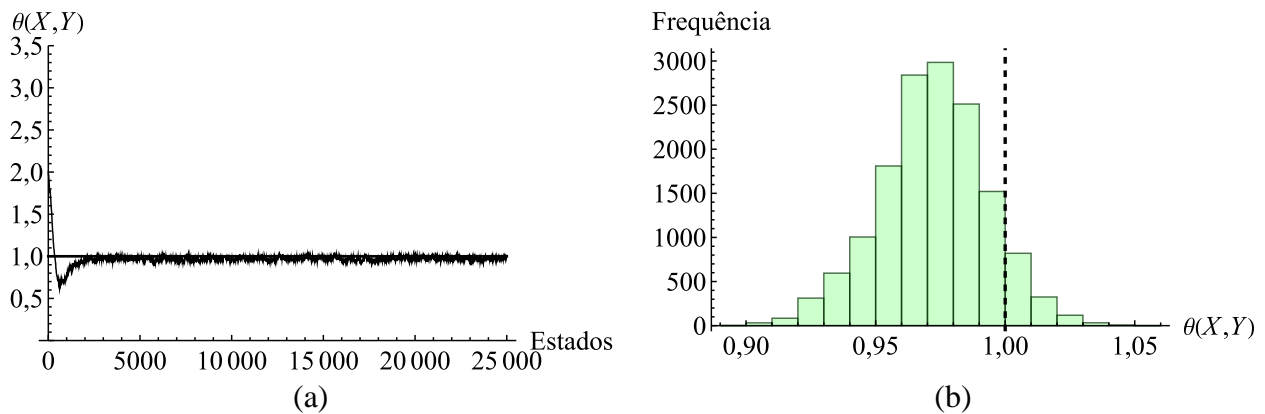


Figura 11 – CASO 4: Cadeia de Markov (a) e Histograma (b), ambos relacionados à temperatura de entrada em  $Y = 0,0$ .



**Figura 12** – CASO 4: Cadeia de Markov (a) e Histograma (b), ambos relacionados à temperatura de entrada em  $Y = 0,5$ .

Neste caso, foram utilizadas cadeias de Markov de 25.000 estados, sendo descartados os primeiros 10.000. O uso de informações *a priori* pouco informativas em geral faz com que os parâmetros levassem mais tempo para convergir. Ainda assim, as soluções obtidas podem ser consideradas de qualidade, especialmente quando comparadas com métodos determinísticos.

## 5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Uma abordagem Bayesiana para a estimativa de perfis de temperatura de entrada em convecção forçada laminar em estado estacionário entre placas paralelas foi analisada. O objetivo desta pesquisa foi demonstrar a aplicabilidade desses métodos, principalmente, quando há informações prévias sobre os parâmetros. A distribuição desconhecida da temperatura de entrada foi estimada com o método de Monte Carlo via Cadeias de Markov, por meio da aplicação do algoritmo Metropolis-Hastings. Os resultados são promissores, especificamente nas análises de funções degrau ou descontínuas. Um estudo mais aprofundado escolhendo outras informações *a priori* não informativas e/ou outras técnicas de regularização poderão permitir que resultados mais acurados sejam obtidos em trabalhos futuros.

## AGRADECIMENTOS

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

O presente trabalho também recebeu apoio do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e da Fundação Carlos Chagas Filho de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro (FAPERJ).

## REFERÊNCIAS

- AGHAYAN, S. A. et al. An Inverse Problem of Temperature Optimization in Hyperthermia by Controlling the Overall Heat Transfer Coefficient. **Journal of Applied Mathematics**, v. 2013, p. 1–9, 2013.
- ALAEIAN, M.; ORLANDE, H. R. B. Inverse Photoacoustic Technique for Parameter and Temperature Estimation in Tissues. **Heat Transfer Engineering**, v. 38, n. 18, p. 1573–1594, 12 dez. 2017.
- BEJAN, A. **Convection heat transfer**. Fourth edition, Wiley, Hoboken, New Jersey, 2013.
- BOKAR, J.; ÖZISIK, M. An inverse analysis for estimating the time-varying inlet temperature in laminar flow inside a parallel plate duct. **International Journal of Heat and Mass Transfer**, vol. 38, no. 1, pp. 39–45, 1995.
- CRESPÍ-LLORENS, D.; GALANIS, N. Laminar forced convection of power-law fluids in the entrance region of parallel plates ducts. **International Journal of Heat and Mass Transfer**, vol. 115, pp. 991–1003, 2017.
- DA SILVA JARDIM, Lucas Correia et al. Brain Thermal and Electrical Properties Estimation Using Experimental Data From Deep Brain Stimulation Lead. **Revista Mundi Engenharia, Tecnologia e Gestão**, v. 5, n. 6, 2020.
- GOODARZI, M.; MAZHARMANESH, S. Analytical study on start-up process in parallel-plate channel under uniform heat flux. **International Journal of Thermal Sciences**, vol. 94, pp. 147–155, 2015.
- KAIPIO, J.P.; SOMERSALO, E. Statistical and Computational Inverse Problems. Vol. 160 of **Applied Mathematical Sciences**, Springer-Verlag, New York, 2005.
- KAIPIO, J.P.; FOX, C. The Bayesian Framework for Inverse Problems in Heat Transfer. **Heat Transfer Engineering**, vol. 32, no. 9, pp. 718–753, 2011.
- LIU, F.B.; ÖZISIK, M.N. Estimation of inlet temperature profile in laminar duct flow. **Inverse Problems in Engineering**, vol. 3, no. 1-3, pp. 131–143, 1996.
- LOIOLA, B. R.; ORLANDE, H. R. B.; DULIKRAVICH, G. S. Thermal damage during ablation of biological tissues. **Numerical Heat Transfer, Part A: Applications**, v. 73, n. 10, p. 685–701, 19 maio 2018.
- LOIOLA, Bruna R.; ORLANDE, Helcio RB; DULIKRAVICH, George S. Approximate Bayesian computation applied to the identification of thermal damage of biological tissues due to laser irradiation. **International Journal of Thermal Sciences**. v. 151, p. 106243, 2020.
- MOTA, Carlos A. A.; ORLANDE, Helcio R. B.; DE CARVALHO, Mario Olavo M.; KOLEHMAINEN, Ville; KAIPIO, Jari P. Bayesian Estimation of Temperature-Dependent Thermophysical Properties and Transient Boundary Heat Flux. **Heat Transfer Engineering**, v. 31, n. 7, p. 570 – 580, 2010.
- ORLANDE, H.R.B. Inverse Problems in Heat Transfer: New Trends on Solution Methodologies and Applications. **Journal of Heat Transfer**, vol. 134, no. 3, p. 031011, 2012.

ORLANDE, Helcio R. B.; FUDYM, Olivier. Thermophysical Properties Measurement and Identification. **Handbook of Thermal Science and Engineering**, 2017.

ÖZISIK, M. N.; ORLANDE, H. R. B. **Inverse Heat Transfer: Fundamentals and Applications**. 2. ed. CRC Press, 2021.

PARWANI, A.K.; TALUKDAR, P.; SUBBARAO, P. Estimation of inlet temperature of a developing fluid flow in a parallel plate channel. **International Journal of Thermal Sciences**, vol. 57, pp. 126–134, 2012.

PARWANI, Ajit K.; TALUKDAR, Prabal; SUBBARAO, P. M. V. Estimation of boundary heat flux using experimental temperature data in turbulent forced convection flow. **Heat and mass Transfer**, v. 51, n. 3, p. 411 – 421, 2015.

PARWANI, Ajit K.; TALUKDAR, Prabal; SUBBARAO, P. M. V. Estimation of inlet temperature of a developing fluid flow in a parallel plate channel. **International journal of thermal sciences**, v. 57, p. 126 – 134, 2012.

PHATAK, Shaunak et al. **Thermal properties of porcine and human biological systems**. In: Handbook of Thermal Science and Engineering. Springer International Publishing, 2018. p. 2279-2304.

ROJCZYK, MJ. et al. Inverse heat transfer problems: an application to bioheat transfer. **Computer Assisted Methods in Engineering and Science**. v.22, n. 4, p. 365-3823, 2017.

ROJCZYK, Marek; ORLANDE, Helcio R. B.; COLAÇO, Marcelo J.; SZCZYGIEL, Ireneusz; NOWAK, Andrzej J.; BIALECKI, Ryszard A.; OSTROWSKI, Ziemowit. Inverse heat transfer problems: an application to bioheat transfer. **Computer Assisted Methods in Engineering and Science**, v. 22, n. 4, p. 365 – 383, 2015.

SHAH, R.K.; LONDON, A.L. **Laminar Flow Forced Convection in Ducts**. Vol. 1 of Advances in Heat Transfer, Academic Press, New York, 1978.