

Análise e estimativa do perfil de temperatura de entrada em micro canais via inferência Bayesiana

Analysis and estimation of the inlet temperature profile in micro-channels via Bayesian inference

Gustavo Antunes Guedes¹, Eduardo Cunha Classe², Diego Campos Knupp³, Luiz Alberto da Silva Abreu⁴

RESUMO

O presente trabalho aborda a solução de um problema inverso de estimativa de funções em transferência de calor por convecção forçada, em regime estacionário, com fluxo laminar em um micro canal com regime de deslizamento. A análise dos resultados do problema inverso envolve a estimativa do perfil de temperatura de entrada utilizando as informações a priori juntamente com as medições de temperatura simuladas, realizadas a jusante da entrada. É empregada uma técnica bayesiana via método de Monte Carlo via Cadeias de Markov em um problema de estimativa de função de entrada em micro canal, por meio do algoritmo Metropolis-Hastings. São analisadas duas funções de entrada distintas, uma parabólica e uma descontínua na forma de degrau, obtendo-se aproximações acuradas para essas funções, bem como distribuições de probabilidade que representam as estimativas obtidas.

Palavras-chave: Temperatura de entrada. Micro canal. Problemas Inversos em Convecção. Inferência Bayesiana.

ABSTRACT

The present work addresses the solution of an inverse problem of estimating functions in forced convection heat transfer, in steady-state, with laminar flow in a microchannel with slip regime. The analysis of the inverse problem results involves estimating the inlet temperature profile using prior information along with simulated temperature measurements taken downstream of the inlet. A Bayesian technique is employed via the Monte Carlo method using Markov Chains in an inlet function estimation problem in a microchannel, through the Metropolis-Hastings algorithm. Two distinct input functions are analyzed, one being parabolic and the other being discontinuous in the form of a step, yielding accurate approximations for these functions as well as probability distributions representing the obtained estimates.

Keywords: Inlet temperature. Micro-channel. Convective Inverse problems. Bayesian inference.

¹Engenheiro Mecânico, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Instituto Politécnico. Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional.

E-mail: gustavo_a_guedes@outlook.com
ORCID: 0000-0001-8764-8093

²Engenheiro Mecânico, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Instituto Politécnico. Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional.

E-mail: eduardo.classe@iprj.uerj.br
ORCID: 0000-0002-2405-3946

³Doutor em Engenharia Mecânica, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Instituto Politécnico. Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional.

E-mail: diegoknupp@iprj.uerj.br
ORCID: 0000-0001-9534-5623

⁴Doutor em Engenharia Mecânica, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Instituto Politécnico. Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional.

E-mail: luiz.abreu@iprj.uerj.br
ORCID: 0000-0002-7634-7014

1. INTRODUÇÃO

Nas últimas três décadas, a pesquisa na área de problemas inversos passou por transformações significativas. Inicialmente, muitos problemas eram resolvidos quase exclusivamente por meio de abordagens determinísticas (BOKAR; ÖZISIK, 1995; COLAÇO; ORLANDE, 2000; LIU; OZISIK, 1996; PARWANI; TALUKDAR; SUBBARAO, 2012; RAGHUNATH, 1993), mas com o tempo e com o avanço dos computadores modernos, com maior capacidade de memória e processamento, os métodos estocásticos ganharam espaço. Além disso, este avanço no uso de métodos estocásticos também tem relação com a crescente complexidade dos desafios enfrentados pelos pesquisadores, em particular na análise térmica de micro canais e suas aplicações.

Embora os métodos determinísticos tenham inúmeras vantagens e tipicamente demonstrem eficiência e baixo custo computacional, entre suas limitações comuns pode-se destacar a dificuldade na obtenção de soluções na estimativa de funções descontínuas e também por não levarem em conta, de forma natural, as incertezas associadas aos parâmetros e modelos envolvidos. Em contrapartida, os métodos bayesianos não apenas oferecem o valor mais provável da variável de interesse, mas também exploram a região circundante, entregando não um único valor, mas sim uma distribuição de probabilidade, permitindo de forma natural uma análise sob incerteza nas soluções obtidas (KAPIO; SOMERSALO, 2005; OZISIK; ORLANDE, 2021). A vantagem adicional dos métodos probabilísticos é a sua baixa complexidade matemática para resolver problemas complexos e mal postos.

Dentre as abordagens probabilísticas, aquelas baseadas na inferência bayesiana têm mostrado resultados promissores em diversas aplicações de transferência de calor (ABREU et al., 2014; CARVALHO et al., 2023; GUEDES et al., 2022; KHAN et al., 2021; ORLANDE et al., 2014; ROJCZYK et al., 2017). Nestas aplicações pode-se notar a capacidade destes métodos em combinar informação a priori com a informação observada, outros exemplos podem ser encontrados na literatura (OZISIK; ORLANDE, 2021; WOODBURY et al., 2023).

O cenário contemporâneo da pesquisa de micro canais destaca-se pela sua crescente importância, impulsionado por diversas aplicações práticas e avanços tecnológicos. Esses estudos geralmente envolvem a estimativa de propriedades termofísicas, condições iniciais ou contornos com base em medições de temperatura a jusante ou na parede (COTTA; KNUPP; NAVEIRA-COTTA, 2016; KULACKI, 2018; TUNC; BAYAZITOGU, 2001; YU; AMEEL, 2001).

Conseqüentemente, a procura por métodos de análise térmica mais sofisticados também aumentou. É neste contexto que a inferência bayesiana surge como uma ferramenta promissora. Até o momento, poucos estudos exploraram a aplicação de abordagens bayesianas à estimativa de funções de temperatura na estimativa de temperatura na entrada de micro canais. Esta é uma área de grande interesse da engenharia, aplicável em sistemas micro eletromecânicos ou controle térmico de microeletrônica (ANTMAN; MARSDEN; SIROVICH, 2005; COTTA; KNUPP; NAVEIRA-COTTA, 2016; GAD-EL-HAK, 2006). Quando a medição direta da temperatura na entrada de um micro canal não é viável, as abordagens do problema inverso oferecem uma alternativa (OZISIK; ORLANDE, 2021; WOODBURY et al., 2023).

Este trabalho tem como objetivo estimar o perfil de temperatura de entrada em um micro canal utilizando uma abordagem bayesiana. Baseado no método de Monte Carlo via Cadeias de Markov utilizando o algoritmo Metropolis-Hastings (KAPIO; FOX, 2011; KAPIO; SOMERSALO, 2005; ORLANDE, 2012; OZISIK; ORLANDE, 2021), destaca-se como a primeira aplicação deste método para estimar a função temperatura na entrada de micro canais. Adicionalmente, a precisão das soluções é influenciada pela qualidade da informação prévia considerada, tornando-a eficaz, especialmente quando é necessário determinar funções descontínuas(OZISIK; ORLANDE, 2021).

2. TRANSFERÊNCIA DE CALOR CONVECTIVA EM MICRO CANAIS

O problema inverso da estimativa da temperatura de entrada requer primeiro uma solução para o problema direto da convecção forçada em micro canais. Uma solução numérica para o problema direto só é possível quando as condições de contorno são especificadas, o que inclui o perfil de temperatura de entrada. Em um método de Monte Carlo via Cadeias de Markov, o problema direto deve ser resolvido múltiplas vezes (ORLANDE, 2012; ORLANDE et al., 2014; OZISIK; ORLANDE, 2021). Neste problema, medições simuladas serão obtidas por meio da adição de ruído à solução do problema direto, o ruído adicionado é aleatório, com distribuição normal, média zero e desvio padrão conhecido. As medições seriam supostamente obtidas em locais a jusante, por meio de técnicas como Micro-LIF (KNUPP et al., 2015).

2.1 Problema Direto

O modelo matemático adotado neste trabalho foi adaptado do modelo obtido da literatura (NAVEIRA-COTTA; COTTA; ORLANDE, 2010), que inclui as modificações necessárias para a representação da física do problema em microescala e ainda assumindo que os perfis de entrada têm variação funcional. O problema consiste em um fenômeno de convecção forçada em microescala entre placas paralelas dentro do regime de escorregamento (ANTMAN; MARSDEN; SIROVICH, 2005; COTTA; KNUPP; NAVEIRA-COTTA, 2016; KNUPP et al., 2015), e o modelo é baseado em um fluxo laminar constante de gás sob desenvolvimento térmico e um perfil de velocidade totalmente desenvolvido na entrada. O fluido troca calor por convecção com as paredes, que possuem comprimento b e d é a distância entre elas. O problema está em regime estacionário com temperatura variando em um espaço bidimensional. Os efeitos da condução axial, convecção livre e dissipação viscosa são desprezados e as propriedades físicas são assumidas constantes. A formulação adimensional que modela o fenômeno de transferência de calor em questão é a seguinte (COTTA; KNUPP; NAVEIRA-COTTA, 2016; NAVEIRA-COTTA; COTTA; ORLANDE, 2010):

$$\frac{\partial^2 \theta(X, Y)}{\partial Y^2} = U(Y) \frac{\partial \theta(X, Y)}{\partial X} \quad \text{para, } 0 < Y < 1 \quad 0 < X < L \quad (1a)$$

$$\frac{\partial \theta(X, Y)}{\partial Y} = \frac{Bi}{1 + Kn \beta_t Bi} \theta(X, Y) \quad \text{para, } Y = 0 \quad 0 < X \quad (1b)$$

$$\frac{\partial \theta(X, Y)}{\partial Y} = \frac{-Bi}{1 + Kn \beta_t Bi} \theta(X, Y) \quad \text{para, } Y = 1 \quad 0 < X \quad (1c)$$

$$\theta(X, Y) = \theta_0(Y) \quad \text{para, } 0 < Y < 1 \quad X = 0 \quad (1d)$$

onde,

$$U(Y) = \frac{6 Kn \beta_v + 6Y(1 - Y)}{1 + 6 Kn \beta_v} \quad (2)$$

As quantidades adimensionais Bi e Kn no conjunto da Eq. (1) e Eq. (2) são os números de Biot e Knudsen respectivamente, sendo seus comprimentos característicos iguais a d , a distância entre as paredes. O parâmetro β_t é o coeficiente de salto de temperatura e β_v é o coeficiente de deslizamento de velocidade, estão relacionadas com a perda de aderência à parede. Os grupos adimensionais restantes são:

$$X = \frac{\alpha x}{u_m d^2} \quad (3)$$

$$Y = \frac{y}{d} \quad (4)$$

$$\theta(X, Y) = \frac{T(x, y) - T_\infty}{T_0 - T_\infty} \quad (5)$$

$$U(Y) = \frac{u(y)}{u_m} \quad (6)$$

Nestes grupos adimensionais α é a difusividade térmica u_m é a velocidade média e $T(x, y)$ é a temperatura do fluido. A solução deste problema proposto é obtida por meio de uma rotina computacional na plataforma Wolfram Mathematica, utilizando uma ferramenta NDSolve que é um solucionador numérico para equações diferenciais. Os resultados são verificados com uma solução numérica usando um método de diferenças finitas obtida em Python. Esta rotina computacional é utilizada em conjunto com o algoritmo Metropolis-Hastings.

2.2 Problema Inverso

Várias abordagens para lidar com o problema inverso em questão podem ser encontradas na literatura existente, utilizando uma gama de técnicas, sejam elas determinísticas ou estocásticas (OZISIK; ORLANDE, 2021; WOODBURY et al., 2023). No entanto, os métodos determinísticos revelam-se menos aptos a incorporar informações a priori sobre parâmetros desconhecidos ou a abordar incertezas em dados experimentais.

Dentro de uma estrutura bayesiana, resolver o problema inverso envolve calcular a função de densidade de probabilidade a posteriori, que representa a probabilidade condicional dos parâmetros dadas as medições. (GAMERMAN; LOPES, 2006; KAIPIO;

SOMERSALO, 2005; ORLANDE, 2012). Conseguir isso envolve tratar tanto as informações a priori sobre os parâmetros quanto a probabilidade das medições como funções de densidade de probabilidade, esta última denominada verossimilhança. A aplicação do Teorema de Bayes é a forma como estas probabilidades, a priori e verossimilhança, são combinadas (GAMERMAN; LOPES, 2006; KAIPIO; SOMERSALO, 2005; OZISIK; ORLANDE, 2021):

$$\pi_{post}(\mathbf{P}) = \pi(\mathbf{P}|\mathbf{M}) = \frac{\pi(\mathbf{M}|\mathbf{P}) \pi_{pr}(\mathbf{P})}{\pi(\mathbf{M})} \quad (7)$$

No Teorema de Bayes, $\pi_{post}(\mathbf{P})$, é a distribuição de probabilidade a posteriori dos parâmetros \mathbf{P} , dadas as medidas \mathbf{M} ; $\pi(\mathbf{M}|\mathbf{P})$, é a distribuição de probabilidade de obter medidas \mathbf{M} , dado \mathbf{P} ; $\pi_{pr}(\mathbf{P})$, é a distribuição de probabilidade a priori; e $\pi(\mathbf{M})$, é a distribuição de probabilidade marginal das medições. A verossimilhança é construída como uma distribuição gaussiana devido a erros aleatórios, aditivos e independentes dos parâmetros com média zero e matriz de covariância \mathbf{W} , associados aos dados experimentais que consistem em, m , medições:

$$\pi(\mathbf{M}|\mathbf{P}) = 2\pi^{m/2} |\mathbf{W}|^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}[\mathbf{M} - \boldsymbol{\theta}(\mathbf{P})]^T \mathbf{W}^{-1} [\mathbf{M} - \boldsymbol{\theta}(\mathbf{P})]\right\} \quad (8)$$

Em que $\boldsymbol{\theta}(\mathbf{P})$, é uma matriz de temperaturas nas mesmas coordenadas espaciais das medições, mas calculada pela solução direta do problema dado o parâmetro \mathbf{P} como a condição de entrada. Para os casos em que informações prévias sobre os parâmetros estão disponíveis, a função de probabilidade a priori também pode ser modelada como uma distribuição gaussiana, com média conhecida e matriz de covariância, expressa como (ORLANDE, 2012):

$$\pi_{pr}(\mathbf{P}) = 2\pi^{n/2} |\mathbf{V}|^{-1/2} \exp\left[-\frac{1}{2}(\mathbf{P} - \bar{\mathbf{P}})^T \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{P} - \bar{\mathbf{P}})\right] \quad (9)$$

onde n é o número de parâmetros, $\bar{\mathbf{P}}$ é uma matriz de valores médios determinados para cada parâmetro e \mathbf{V} matriz de covariância dos parâmetros. Uma priori pode ser construída em casos onde não se sabe muito sobre os parâmetros, entre as prioris ditas não informativas, destaca-se uma que se baseia na variação total, que torna mais provável a estimativa de funções mais suaves, este tipo de prior pode ser escrito como (ABREU et al., 2014; KAIPIO; SOMERSALO, 2005; OZISIK; ORLANDE, 2021):

$$\pi_{pr}(\mathbf{P}) \propto \exp \left[-\xi \sum_{j=1}^n (P_{j+1} - P_j) \right] \quad (10)$$

onde, P_j é um parâmetro único na matriz \mathbf{P} e ξ é uma constante de ajuste. A função de probabilidade posteriori é obtida através do teorema de Bayes na Eq. (7), usando a função de verossimilhança, Eq. (8) e um dos modelos de probabilidade a priori, Eq. (9) e Eq. (10).

Para explorar a probabilidade a posteriori com múltiplos parâmetros, é utilizado um método MCMC por meio do algoritmo Metropolis-Hastings, que é comumente utilizado (OZISIK; ORLANDE, 2021). Neste algoritmo, o processo começa com uma distribuição $p(\mathbf{P}^* | \mathbf{P}^{t-1})$, que gera um candidato, \mathbf{P}^* , dado a matriz de parâmetros no estado atual da Cadeia de Markov \mathbf{P}^{t-1} . Este algoritmo de amostragem é empregado pela seguinte rotina (GAMERMAN; LOPES, 2006; KAIPIO; SOMERSALO, 2005; ORLANDE, 2012):

- I. Gerar um candidato aleatório \mathbf{P}^* , de uma distribuição $p(\mathbf{P}^* | \mathbf{P}^{t-1})$;
- II. Determinar a razão de Hastings Eq. (11);

$$RH = \min \left[1, \frac{\pi(\mathbf{P}^* | \mathbf{M}) p(\mathbf{P}^{t-1} | \mathbf{P}^*)}{\pi(\mathbf{P}^{t-1} | \mathbf{M}) p(\mathbf{P}^* | \mathbf{P}^{t-1})} \right] \quad (11)$$

- III. Escolher um número aleatório ω , de uma distribuição uniforme $\Omega[0,1]$;
- IV. Se $\omega \leq RH$, o candidato é aceito, $\mathbf{P}^t = \mathbf{P}^*$. Caso contrário, é rejeitado: $\mathbf{P}^t = \mathbf{P}^{t-1}$;
- V. Retornar para o passo I para gerar a cadeia de Markov: $\{\mathbf{P}^0, \mathbf{P}^1, \mathbf{P}^2, \dots, \mathbf{P}^t\}$.

Durante este processo, é observada a proporção de aceitação do candidato. Uma baixa aceitação de candidatos resultará em distribuições cheias dos mesmos valores, e com uma alta aceitação de candidatos as cadeias demorarão mais para convergir (GAMERMAN; LOPES, 2006). Assim que a Cadeia de Markov, gerada pelo algoritmo, converge em um determinado intervalo, ela representa a probabilidade posteriori dos parâmetros. Os estados iniciais da cadeia de Markov, ou seja, antes da convergência, devem ser descartados para contabilizar o período de queima (*burn-in-period*). Ao final do processo cada parâmetro terá uma cadeia de valores, que poderá ser utilizada para obter um valor médio e seu intervalo de credibilidade (GAMERMAN; LOPES, 2006; KAIPIO; SOMERSALO, 2005; OZISIK; ORLANDE, 2021).

3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Para gerar os resultados foi implementada uma rotina computacional na plataforma Wolfram Mathematica. O problema direto é resolvido utilizando a função `NDSolve`, que é um solucionador de equações diferenciais, intrínseca no software e a solução do problema inverso foi solucionado com o algoritmo Metropolis-Hastings. Os valores utilizados para as propriedades adimensionais e geometria do fluxo do micro fluido foram retirados do trabalho de (NAVEIRA-COTTA; COTTA; ORLANDE, 2010). Foram adotados os seguintes valores $\beta_v = 1,5$, $\beta_t = 2,0$, $Kn = 0,0250$, $Bi = 2,0$ e $L = 1,25$.

Os dados experimentais simulados são compostos por dez medições de temperatura espaçadas uniformemente entre as paredes, incluindo aquelas nas posições $Y=0$ e $Y=1$, tomadas na posição $X=0,25$ da entrada. As medições são simuladas como distribuições normais com médias em seus valores exatos e desvio padrão de 1%

No primeiro caso, é examinado um perfil parabólico de temperatura de entrada e são definidas prioris gaussianas para todos os parâmetros de temperatura de entrada, com desvio padrão de 10% e médias nos valores esperados. Assumiu-se que quinze parâmetros são estimados na entrada, cada um correspondendo a um valor discreto de temperatura. Todos os parâmetros são espaçados uniformemente ao longo das posições $Y = 0$ a $Y = 1$. Sob estas condições, o método resultou em uma estimativa acurada para o perfil de temperatura de entrada, como mostra a Figura 1. Os parâmetros que representam a função em pontos discretos são graficamente mostrados como pontos pretos e correspondem ao valor médio, obtidos dos estados convergidos das cadeias de Markov.

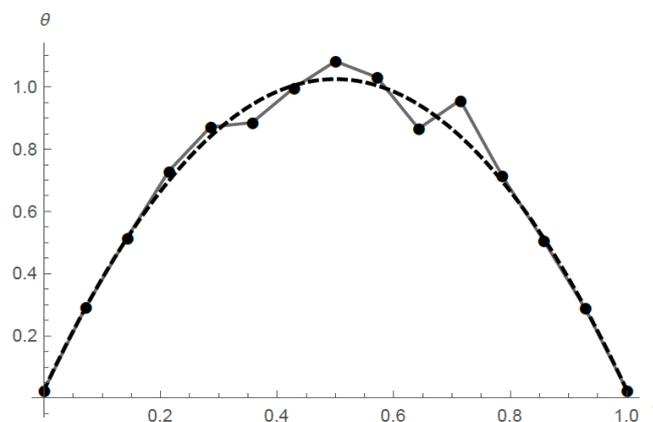


Figura 1. Estimativa para o perfil de entrada parabólico com priori gaussiana e 10% de desvio padrão.

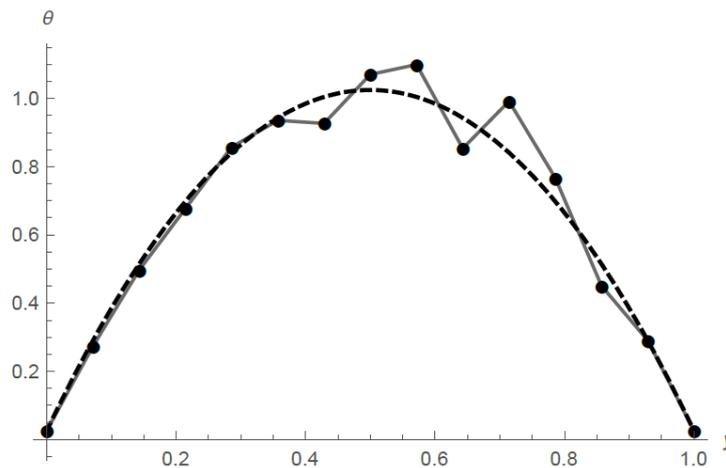


Figura 2. Estimativa para o perfil de entrada parabólico com priori gaussiana e 20% de desvio padrão.

As cadeias tinham um total de 30.000 estados e foram necessários menos de 10.000 estados para a convergência. Para testar os limites deste método, os mesmos dados experimentais foram utilizados para estimar as temperaturas de entrada, com informação a priori gaussiana, com desvio padrão de 20%. Os resultados são mostrados na Figura 2. Neste caso, os parâmetros foram mais difíceis de estimar, mas os resultados ainda são acurados, uma vez que todas as médias estimadas estão próximas do valor correto. As cadeias de Markov da Figura 4 levaram mais estados para convergir e assumiram intervalor de credibilidade mais amplos, se comparadas ao caso apresentado na Figura 3.

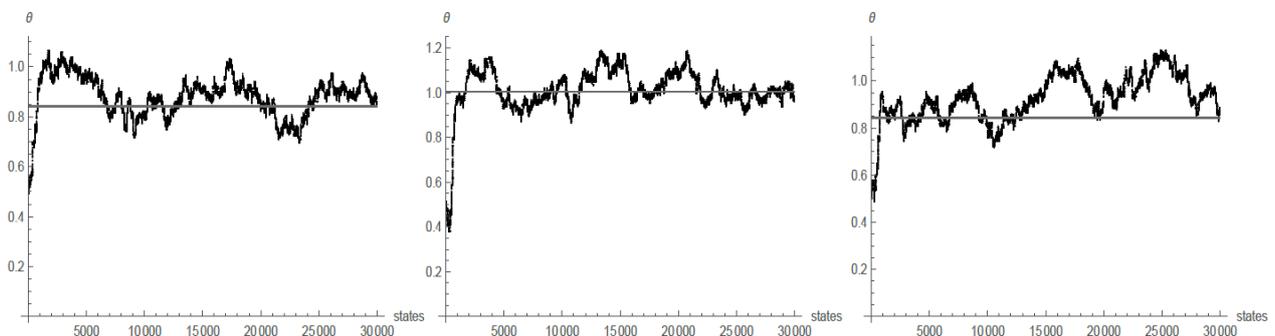


Figura 3. cadeias de Markov para perfil de entrada parabólico com priori gaussiana e 10% de desvio padrão para $Y = 2/7$, $Y = 4/7$ and $Y = 5/7$, respectivamente.

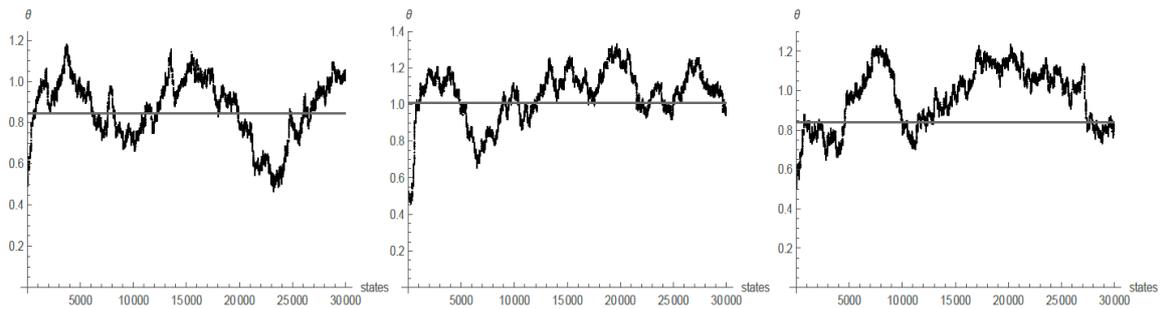


Figura 4. Cadeias de Markov para perfil de entrada parabólico com priori gaussiana e 20% de desvio padrão para $Y = 2/7$, $Y = 4/7$ and $Y = 5/7$, respectivamente.

Tratar parâmetros como variáveis aleatórias independentes, como é feito por este processo estocástico, é especialmente útil ao estimar funções descontínuas. Para testar esta premissa, uma função degrau foi definida como o perfil de entrada em um terceiro caso. A Figura 5 mostra os resultados. Ao empregar informação a priori gaussiana com desvio padrão de 10%, os parâmetros ficaram dentro da faixa das temperaturas de entrada prescritas e forneceram um resultado satisfatório.

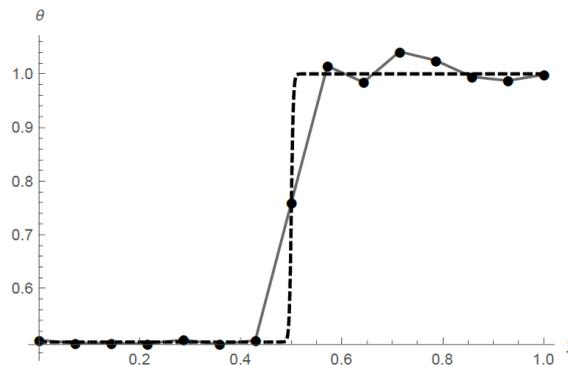


Figura 5. Estimativa para o perfil de entrada degrau com priori gaussiana e 10% de desvio padrão.

As cadeias de Markov da Figura 6 mostram a convergência e o intervalo assumido por alguns parâmetros neste caso.

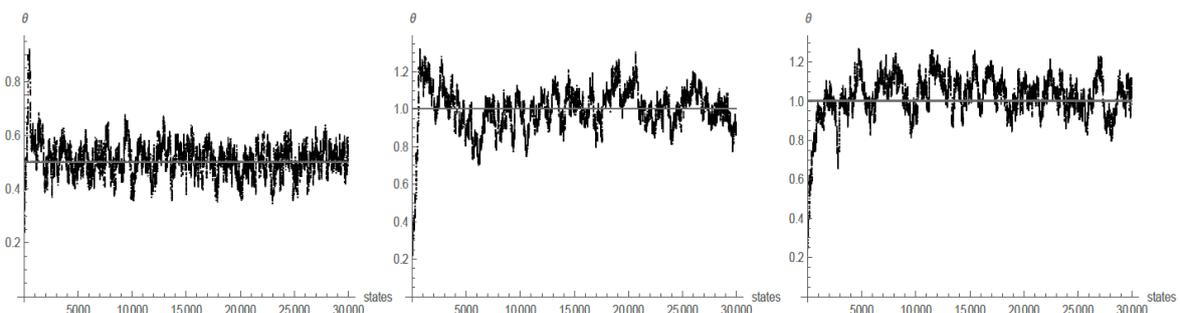


Figura 6. Cadeias de Markov para perfil de entrada degrau com priori gaussiana e 10% de desvio padrão para $Y = 2/7$, $Y = 4/7$ and $Y = 5/7$, respectivamente.

Os mesmos dados experimentais são então testados com uma priori gaussiana com um desvio padrão empregado de 20%, os resultados estão presentes na Figura 7. Neste caso, 30.000 estados foram usados para gerar as cadeias de Markov, sendo os primeiros 10.000 deles descartados para contabilização para o período de queima. A informação a priori não foi suficiente para que todos os parâmetros convergissem para a temperatura de entrada prescrita. A Figura 8 mostra uma faixa mais ampla de valores assumidos em algumas cadeias de Markov, especialmente na região de descontinuidade que é particularmente desafiadora.

No caso final, uma densidade de variação total a priori é aplicada considerando um ruído gaussiano com 20% de desvio padrão. Os resultados são mostrados na Figura 9.

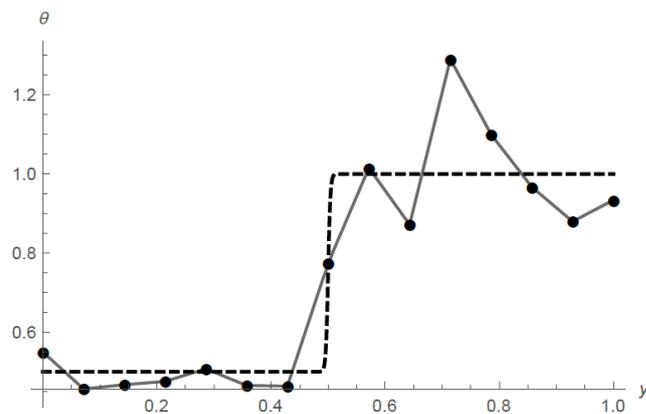


Figura 7. Estimativa para o perfil de entrada degrau com priori gaussiana e 20% de desvio padrão.



Figura 8. Cadeias de Markov para perfil de entrada degrau com priori gaussiana e 20% de desvio padrão para $Y = 2/7$, $Y = 4/7$ and $Y = 5/7$, respectivamente.

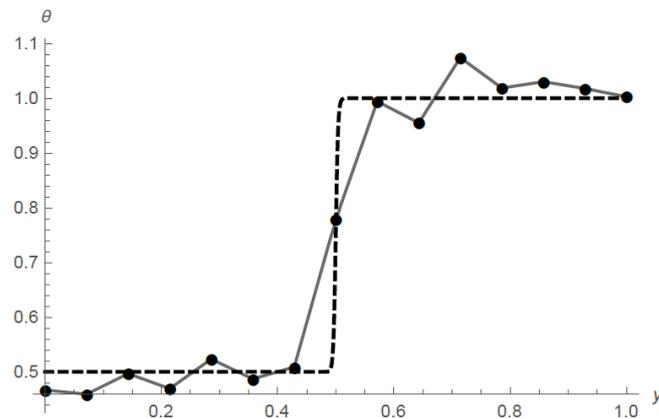


Figura 9. Estimativa para o perfil de entrada degrau com priori gaussiana 20% de desvio padrão variação total.

Este modelo utilizou um parâmetro de regularização $\varepsilon = 1$, mas é possível que valores diferentes, para esta constante, possam alcançar resultados distintos. Uma comparação entre as Figuras 7 e 9 mostram o benefício da priori de variação total, em particular o fato de que nela quase nenhuma informação sobre a forma funcional é necessária.

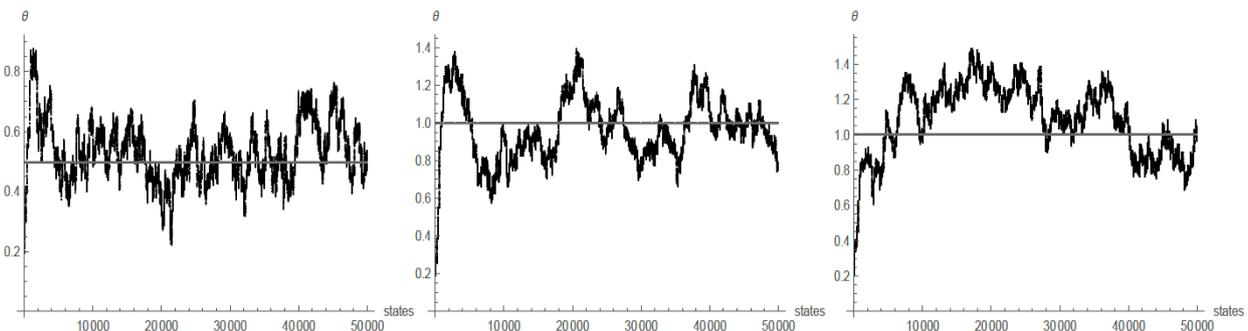


Figura 10. Cadeias de Markov para perfil de entrada degrau com priori gaussiana e 20% de desvio padrão com utilização da variação total para $Y = 2/7$, $Y = 4/7$ and $Y = 5/7$, respectivamente.

Os exemplos de cadeias de Markov estão presentes na Fig. 10 e mostram os valores assumidos em 50.000 estados, dos quais os primeiros 20.000 são descartados.

4. CONCLUSÃO

Foi apresentado um estudo de um problema inverso de transferência de calor por convecção em microescala, envolvendo estimativa de funções. O perfil de temperatura na entrada de um micro canal em regime de deslizamento foi estimado com o uso de uma estrutura bayesiana.

O objetivo deste trabalho foi testar a aplicabilidade de um método bayesiano em problemas que envolvem a estimativa de perfis de temperatura, em particular com a inclusão de diferentes informações a priori.

O problema direto foi calculado com um método numérico de equações diferenciais que possui custo computacional baixo, o que é conveniente para a solução do problema inverso via métodos MCMC. Valores discretos de temperatura de entrada foram usados como parâmetros para representar a estimativa da função, que foi estimada usando um método MCMC, em conjunto com o algoritmo Metropolis-Hastings. Este método produziu resultados acurados para os parâmetros estimados, dentro do intervalo de credibilidade em torno da solução exata. Nota-se que a eficácia do método depende da qualidade do conhecimento prévio sobre o parâmetro desejado a ser estimado. Nesse sentido, a inclusão de informações prévias mostrou-se uma ferramenta poderosa na análise dos resultados do problema inverso, como indicam os resultados utilizando medições simuladas.

AGRADECIMENTOS

Este estudo foi financiado em parte pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código Financeiro 001.

Os autores também agradecem o apoio financeiro da Fundação Carlos Chagas Filho de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro (FAPERJ) e do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq).

REFERÊNCIAS

ABREU, L. A. et al. Identification of Contact Failures in Multilayered Composites With the Markov Chain Monte Carlo Method. **Journal of Heat Transfer**, v. 136, n. 10, p. 101302–101302, 2014.

ANTMAN, S. S.; MARSDEN, J. E.; SIROVICH, L. (EDS.). **Microflows and Nanoflows**. New York: Springer-Verlag, 2005. v. 29

BOKAR, J. C.; ÖZISIK, M. N. An inverse analysis for estimating the time-varying inlet temperature in laminar flow inside a parallel plate duct. **International Journal of Heat and Mass Transfer**, v. 38, n. 1, p. 39–45, 1995.

CARVALHO, M. G. Q. et al. Estimativa do fluxo de calor de contorno com variação espacial em placas paralelas com escoamento laminar por meio de problemas inversos via inferência bayesiana e método de Monte Carlo via Cadeias de Markov. **Revista Mundi Engenharia, Tecnologia e Gestão**, 1. v. 8, 2023.

- COLAÇO, M. J.; ORLANDE, H. R. B. A function estimation approach for the identification of the transient inlet profile in parallel plate channels. Em: **Inverse Problems in Engineering Mechanics II**. Elsevier, 2000. p. 409–418.
- COTTA, R. M.; KNUPP, D. C.; NAVEIRA-COTTA, C. P. **Analytical Heat and Fluid Flow in Microchannels and Microsystems**. Cham: Springer International Publishing, 2016.
- GAD-EL-HAK, M. (ED.). **MEMS: introduction and fundamentals**. 2nd ed ed. Boca Raton: CRC/Taylor & Francis, 2006.
- GAMERMAN, D.; LOPES, H. F. **Markov chain Monte Carlo: stochastic simulation for Bayesian inference**. 2nd ed. Boca Raton: Taylor & Francis, 2006.
- GUEDES, G. A. et al. Estimativa do perfil de temperatura na entrada de dutos via Método de Monte Carlo com Cadeias de Markov. **Revista Cereus**, v. 14, n. 4, 2022.
- KAPIO, J. P.; FOX, C. The Bayesian Framework for Inverse Problems in Heat Transfer. **Heat Transfer Engineering**, v. 32, n. 9, p. 718–753, 2011.
- KAPIO, J.; SOMERSALO, E. **Statistical and Computational Inverse Problems**. New York: Springer-Verlag, 2005. v. 160
- KHAN, A. I. et al. Bayesian Method for Parameter Estimation in Transient Heat Transfer Problem. **International Journal of Heat and Mass Transfer**, v. 166, p. 120746, 2021.
- KNUPP, D. C. et al. Analysis of conjugated heat transfer in micro-heat exchangers via integral transforms and non-intrusive optical techniques. **International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow**, v. 25, n. 6, p. 1444–1462, 2015.
- KULACKI, F. A. **Handbook of thermal science and engineering**. New York, NY: Springer Berlin Heidelberg, 2018.
- LIU, F. B.; OZISIK, M. N. Estimation of inlet temperature profile in laminar duct flow. **Inverse Problems in Engineering**, v. 3, n. 1–3, p. 131–143, 1996.
- NAVEIRA-COTTA, C. P.; COTTA, R. M.; ORLANDE, H. R. B. Inverse analysis of forced convection in micro-channels with slip flow via integral transforms and Bayesian inference. **International Journal of Thermal Sciences**, v. 49, n. 6, p. 879–888, 2010.
- ORLANDE, H. R. B. Inverse Problems in Heat Transfer: New Trends on Solution Methodologies and Applications. **Journal of Heat Transfer**, v. 134, n. 3, p. 031011, 2012.
- ORLANDE, H. R. B. et al. Accelerated Bayesian Inference for the Estimation of Spatially Varying Heat Flux in a Heat Conduction Problem. **Numerical Heat Transfer, Part A: Applications**, v. 65, n. 1, p. 1–25, 2014.
- OZISIK, M. N.; ORLANDE, H. R. B. **Inverse Heat Transfer: Fundamentals and Applications**. 2. ed. Boca Raton: CRC Press, 2021.
- PARWANI, A. K.; TALUKDAR, P.; SUBBARAO, P. M. V. Estimation of inlet temperature of a developing fluid flow in a parallel plate channel. **International Journal of Thermal Sciences**, v. 57, p. 126–134, 2012.

RAGHUNATH, R. Determining entrance conditions from downstream measurements. **International Communications in Heat and Mass Transfer**, v. 20, n. 2, p. 173–183, 1993.

ROJCZYK, M. et al. Inverse heat transfer problems: an application to bioheat transfer. **Computer Assisted Methods in Engineering and Science**, v. 22, n. 4, p. 365–383, 25 2017.

TUNC, G.; BAYAZITOGLU, Y. Heat transfer in microtubes with viscous dissipation. **International Journal of Heat and Mass Transfer**, v. 44, n. 13, p. 2395–2403, 2001.

WOODBURY, K. A. et al. **Inverse Heat Conduction: Ill-Posed Problems**. 1. ed. Wiley, 2023.

YU, S.; AMEEL, T. A. Slip-flow heat transfer in rectangular microchannels. **International Journal of Heat and Mass Transfer**, v. 44, n. 22, p. 4225–4234, 2001.