

## Desenvolvimento e avaliação de um modelo computacional de análise cinemática de uma suspensão duplo A com sistema de acionamento de amortecimento indireto

*Development and assessment of a computational model of kinematics analysis of a double A suspension with Indirect damping driving system*

Márcio Fernando Corrêa Silveira<sup>1</sup>, Ricardo Humberto de Oliveira Filho<sup>2</sup>, Tobias Anderson Guimarães<sup>3</sup>

### RESUMO

A construção de um veículo de competição Fórmula SAE (FSAE) possui um custo elevado. Portanto, a utilização de modelos matemáticos e computacionais têm sido o melhor caminho para desenvolver e validar um projeto antes da fabricação. Neste trabalho foi desenvolvida uma metodologia de previsão do comportamento cinemático de um modelo de suspensão duplo A com acionamento indireto, altamente utilizado pelas equipes FSAE e em veículos de alto desempenho, tais como os de F1 (Fórmula 1). A modelagem da suspensão foi desenvolvida em linguagem MATLAB<sup>®</sup> com o objetivo de prever o desempenho do veículo da equipe Taurus Racing da Universidade Federal do Triângulo Mineiro na competição de Fórmula SAE Brasil. Por fim, foi possível validar o modelo computacional através da comparação com o modelo matemático implementado em MATLAB<sup>®</sup> com os resultados fornecidos com o software Lotus Cars<sup>®</sup>.

**Palavras-chave:** Cinemática Vertical. Modelagem Computacional. Suspensão Duplo A. Veículo de Fórmula SAE.

### ABSTRACT

The manufacture of a Formula SAE (FSAE) competition vehicle has a high cost. Therefore, the use of mathematical and computational models has been the best way to develop and validate a project before manufacturing. In this work, it was developed a methodology of prediction of the kinematic behavior of a double A suspension model with indirect activation of the damping system, highly used by the FSAE teams and in high performance vehicles, such as the F1 (Formula 1). The modelling of suspension was developed in language MATLAB<sup>®</sup> with the objective of predict the performance of the vehicle from Federal University of Triângulo Mineiro Taurus Racing Team in the Formula SAE Brazil competition. Finally, it was possible to validate the computational model through comparison with the mathematical model implemented in MATLAB<sup>®</sup> with the results provided by the software Lotus Cars<sup>®</sup>.

**Keywords:** Computational Modeling. Double A Suspension. Formula SAE Vehicle. Vertical Kinematics.

<sup>1</sup> Graduação em engenharia mecânica, Makeng – Soluções Construtivas. ORCID: <https://orcid.org/0009-0004-1117-5807>

E-mail:

[marcio.fernando.k@gmail.com](mailto:marcio.fernando.k@gmail.com)

<sup>2</sup> Doutorado em engenharia mecânica, UFTM. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6077-9410>

<sup>3</sup> Doutorado em engenharia mecânica, UFTM. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6350-7867>

## 1. INTRODUÇÃO

O sistema de suspensão automotiva tem como principais funções: absorver as forças transferidas pelas irregularidades da pista, manter as rodas em contato direto com o solo durante o uso e possibilitar a dirigibilidade do mesmo (MILLIKEN, 1995)

Entre os muitos tipos de sistemas de suspensão os mais comuns, tem-se: *MacPherson*, *Multi-Link*, Barra de Torção e o Duplo A, conhecido também como *Double Wishbone*, o qual é o tema deste trabalho (DIXON, 2009).

O sistema Duplo A possui algumas vantagens ao ser empregado, em geral, essas são essenciais para carros de corrida, sendo elas, a pouca transferência de vibrações para a estrutura do veículo, alto rendimento e ótimo controle do ângulo de cambagem. E além dessas, a mais importante é por tornar o movimento de cada roda independente das demais.

Esse tipo de suspensão é composto geralmente por dois braços, um superior e outro inferior, em formato de "A". Cada uma dessas triangulações ligam a manga de eixo ao chassi. Um amortecedor é preso a um desses braços e fixado sua outra extremidade no chassi. Possui ainda uma barra de controle, ou braço de controle, o qual tem a função de estabilizar o sistema mantendo a roda estável impedindo sua rotação em torno do eixo formado pelos pontos superior e inferior de fixação da manga de eixo. Para a suspensão dianteira, esse braço de controle é chamado de braço de direção, o qual é responsável pelo esterçamento da roda, ou seja, é ligado da manga de eixo à caixa de direção. Para a suspensão traseira, esse braço é chamado de *Tie Rod*, ou tirante, ligado da manga até a estrutura, impossibilitando que a roda esterce, tornando-a estável.

Esse modelo é conhecido como direto, porém ainda existe uma variação, o indireto, onde o amortecedor, invés de ser ligado diretamente ao braço de suspensão, ele é ativado por um sistema de acionamento composto por uma haste rígida, *push rod* ou *pull rod*, ligada ao braço e um balancim, *bell-crank*, o qual recebe a força da haste e transfere ao amortecedor.

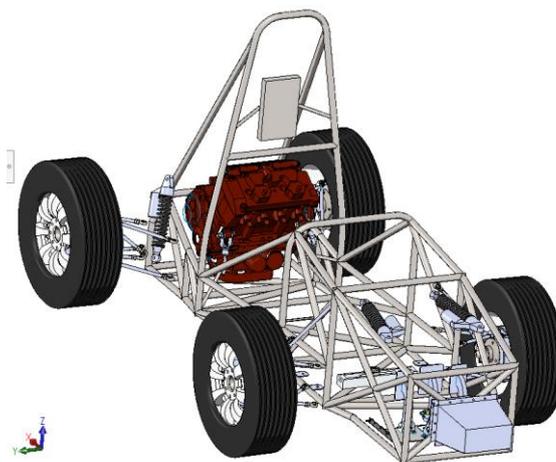
A utilização do *bell-crank* possibilita alocar o amortecedor em locais variados, podendo ainda o fixar no interior da carenagem, de forma a proporcionar uma melhoria aerodinâmica ao veículo, removendo o amortecedor do fluxo de ar. Além desse, com um simples ajuste ao *bell-crank*, é possível alterar a razão de instalação (*Installation Ratio* ou *Motion Ratio*), sendo importante para o ajuste da taxa entre o movimento vertical da roda e o deslocamento do amortecedor (DIXON, 2009).

Para o estudo e análise, utilizou-se o projeto da suspensão do veículo FSAE da equipe Taurus Racing FSAE – Universidade Federal do Triângulo Mineiro (UFTM), modelo TR-02.

Esse trabalho tem como objetivo geral desenvolver um modelo cinemático para avaliação da geometria de uma suspensão duplo A para veículos tipo Fórmula SAE, utilizando um sistema de acionamento de amortecimento indireto, pela implementação de um *bell-crank* e *push-rod*. Para tanto será necessário: 1) Desenvolver e implementar em MATLAB® o modelo matemático do sistema de suspensão do tipo duplo A com acionamento indireto do amortecedor e 2) Desenvolver o modelo computacional do sistema de suspensão no software Lotus Cars® e validar pela comparação dos resultados obtidos com o modelo matemático.

## 2. MATERIAIS E MÉTODOS

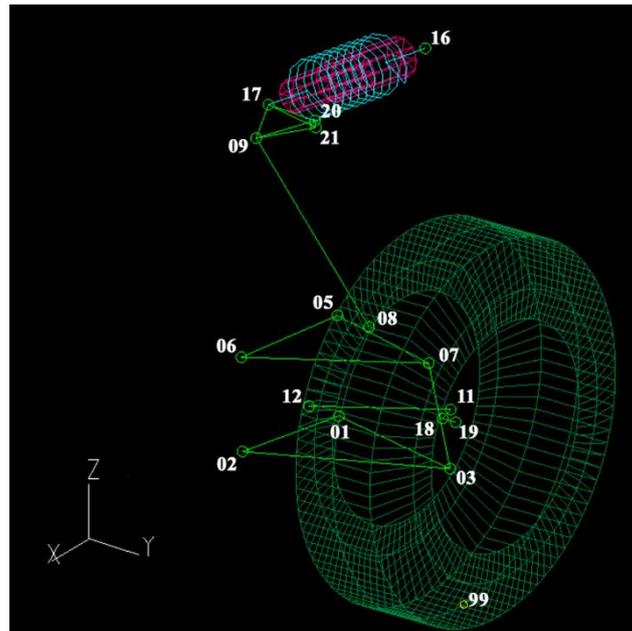
O primeiro passo foi o desenvolvimento do modelo computacional do protótipo do veículo Fórmula SAE da equipe Taurus Racing da UFTM (Figura 1). O modelo foi importado para o software Lotus® e então montado o modelo para análise cinemática do sistema de suspensão dianteira em questão (Figura 2).



**Figura 1.** Modelo TR-02 do veículo FSAE da equipe Taurus Racing.

Para validar o modelo computacional é necessária uma comparação dos resultados da simulação realizada no software Lotus® com o modelo matemático. Nessa etapa, serão analisadas as principais saídas necessárias para concluir que uma geometria de suspensão poderá desempenhar o papel para o qual foi projetada.

O movimento vertical da roda pode ser transmitido para o sistema de suspensão, para a simulação, tanto pelo centro da roda, quanto pela base da roda (BLUNDELL et. al., 2004). Devido às complicações características das propriedades do pneu, o qual resultaria em correções para os cálculos dos principais ângulos (BLUNDELL et. al., 2004) adotou-se o centro da roda como ponto de transmissão do movimento.



**Figura 2.** Modelo cinemático desenvolvido no software LOTUS®.

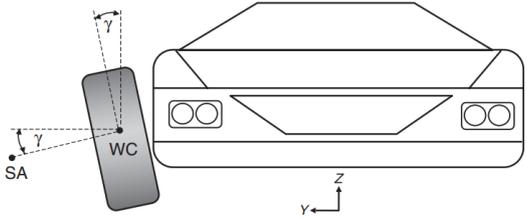
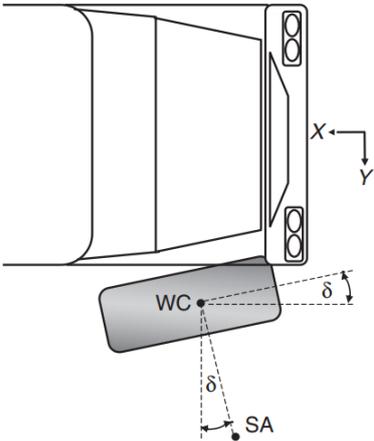
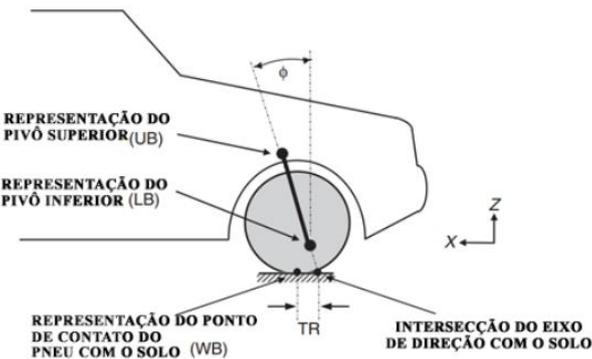
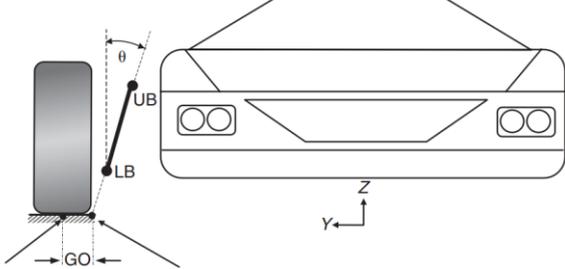
Maiores detalhes da definição e formulação dos parâmetros de saída do modelo matemático da suspensão pode ser encontrada em Blundell et. al. (2004). A Tabela 1 fornece um resumo do significado geométrico dos principais parâmetros de saída a serem avaliados, tanto pelo modelo computacional, como pelo modelo matemático da suspensão duplo A do veículo de Fórmula SAE (BLUNDELL et. al., 2004).

Devido à extensão de resolução das equações usadas na formulação de cada parâmetro definida na Tabela 1, recomenda-se a partir desse ponto utilizar um software para obter as respostas. No estudo adota-se o MATLAB® para implementar os métodos matemáticos de solução da cinemática da geometria de suspensão duplo A.

O modelo avaliado neste trabalho representa 1/4 (um quarto) de veículo, representando a roda dianteira direita do veículo. Adotou-se um sistema de coordenadas global com o eixo longitudinal, X, sendo positivo apontando para a traseira do carro, o eixo lateral, Y, apontando para a lateral direita e o eixo vertical, Z, apontado para cima (Figura 2). É

estritamente importante que as formulações sejam consistentes com o sistema de coordenadas adotado para que as respostas sejam congruentes.

**Tabela 1.** Resumo do significado geométrico dos principais parâmetros a serem avaliados na modelagem de uma suspensão do tipo Duplo A (BLUNDELL et. al., 2004).

Parâmetro	Representação Geométrica
Ângulo de Cambagem ( $\gamma$ ): ângulo entre o plano médio e a vertical	
Ângulo de Convergência ( $\delta$ ): ângulo formado pelo pneu e o eixo longitudinal do veículo	
Ângulo de Caster ( $\phi$ ): ângulo formado entre o pino mestre e a vertical	
Inclinação do Pino Mestre ( $\theta$ ): ângulo de direção da roda quando o braço de direção é acionado	

A posição do centro de rotação também é importante no projeto de um veículo, principalmente de um veículo de corrida, pois é sobre esse ponto no espaço que ocorre todas as transferências de peso, seja durante o movimento de frenagem ou aceleração, e, para o movimento em curva, onde exerce-se as forças laterais. Para o centro de rotação, a análise é realizada na vista frontal do veículo. A Tabela 2 fornece uma síntese da definição destes parâmetros e a ilustração do significado geométrico de cada um deles.

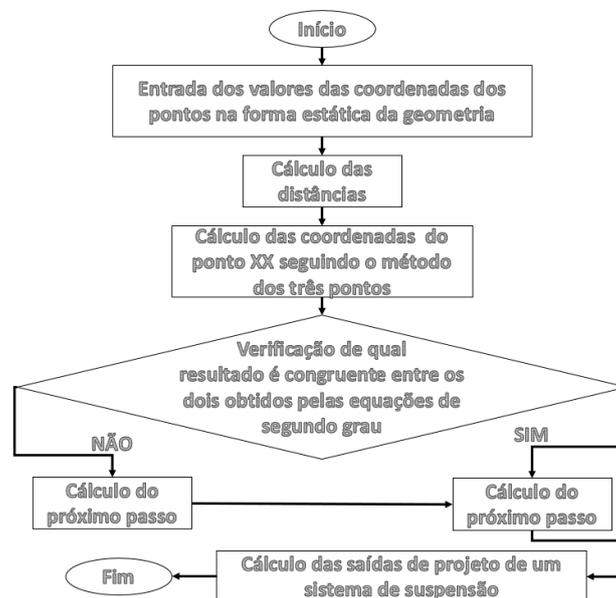
**Tabela 2.** Resumo do significado geométrico dos parâmetros em relação ao centro de rotação a serem avaliados na modelagem de uma suspensão do tipo Duplo A (MILLIKEN, 1995).

Parâmetro	Representação Geométrica
Centro Instantâneo de Rotação (IC): interseção do prolongamento das linhas dos braços inferior e superior da suspensão	
Centro de Rotação (RC): ponto de intersecção com o eixo vertical central do veículo do prolongamento da linha do ponto de contato do pneu com o solo	
Altura do Centro de Rotação ( $h_{RC}$ ): posição vertical do centro de rotação em relação a algum referencial, podendo ser a própria estrutura ou o solo	

O posicionamento e a geometria dos braços da suspensão influenciam diretamente na posição do centro de rotação. Indica-se utilizar a forma gráfica para expressar e dimensionar a cinemática e posição do centro de rotação (GILLESPIE, 1994) como mostrado na Tabela 2.

**Tabela 3.** Valores das coordenadas dos pontos da suspensão duplo A dianteira do projeto TR-02.

	X	Y	Z
{R <sub>01</sub> }	-75,00	305,40	190,00
{R <sub>02</sub> }	150,00	305,40	225,00
{R <sub>03</sub> }	-17,87	545,57	199,10
{R <sub>05</sub> }	-75,00	305,40	350,00
{R <sub>06</sub> }	150,00	305,40	375,00
{R <sub>07</sub> }	0,00	523,65	368,10
{R <sub>08</sub> }	0,00	418,50	395,00
{R <sub>09</sub> }	-30,00	200,00	620,00
{R <sub>11</sub> }	-120,00	470,00	230,00
{R <sub>12</sub> }	0,00	310,00	237,53
{R <sub>16</sub> }	-430,80	196,29	598,88
{R <sub>17</sub> }	-125,00	150,00	620,00
{R <sub>18</sub> }	0,00	547,02	286,80
{R <sub>19</sub> }	0,00	570,00	287,60
{R <sub>20</sub> }	-75,00	270,00	650,00
{R <sub>21</sub> }	-90,00	260,00	630,00
{R <sub>99</sub> }	0,00	580,04	0,18



**Figura 3.** Fluxograma da sequência de lógica implementada em linguagem MATLAB® do modelo matemático.

Os valores algébricos das coordenadas pontos do sistema de suspensão, referente ao projeto TR-02 da equipe Taurus Racing, utilizados tanto para o modelo computacional

avaliado, Lotus<sup>®</sup>, quanto para o modelo matemático, MATLAB<sup>®</sup>, estão representados na Tabela 3. A Figura 2 ilustra o posicionamento dos pontos, descritos na Tabela 3, usados na criação do modelo matemático da suspensão duplo A.

O regulamento da Competição Fórmula SAE determina que o curso vertical mínimo da roda deve ser de 50,8 mm, ou seja, 25,4 mm no ressalto (*Bump*) e 25,4 mm no rebaixo (*Rebound*) da roda. A aplicação foi realizada para o curso total de 60 mm. Para implementação do modelo matemático no MATLAB<sup>®</sup>, utilizou-se a sequência lógica descrita no fluxograma mostrado na Figura 3.

### 3. RESULTADOS

Para cada um dos casos avaliados nos dois métodos, os parâmetros são apresentados como gráficos 2D, tendo o movimento vertical da roda, de ressalto e rebaixo, como a variável independente, plotada no eixo X.

Uma verificação ponto a ponto, dos resultados gerados durante o movimento vertical da roda foi realizada, comparando as respostas do Lotus<sup>®</sup> com o modelo matemático desenvolvido em linguagem MATLAB<sup>®</sup>. Todos os resultados dos pontos obtidos até o  $\{R_{19}\}$ , seguindo a sequência descrita no fluxograma da Figura 3, foram congruentes entre si. Esse fato se confirma pela exata comparação dos valores, mostrado nas Figuras 4, 5, 6 e 7 nos quais ambos métodos de avaliação possuem resultados idênticos. Em todas as figuras, os pontos em cor preta representam os resultados gerados pelo modelo matemático no MATLAB<sup>®</sup> e a curva em cor vermelha os resultados do modelo implementado no software Lotus<sup>®</sup>.

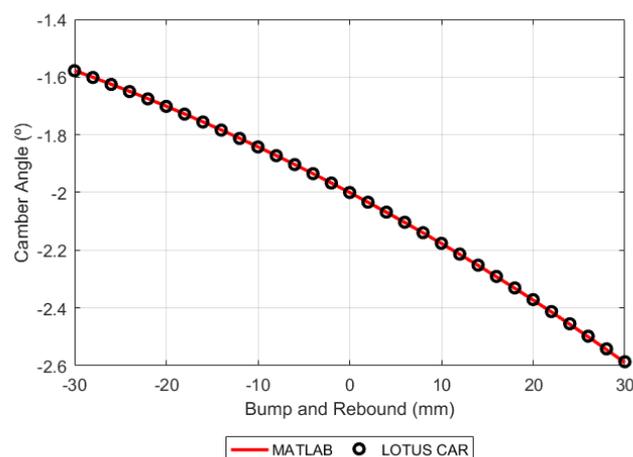


Figura 4. Comparação do ângulo de cambagem.

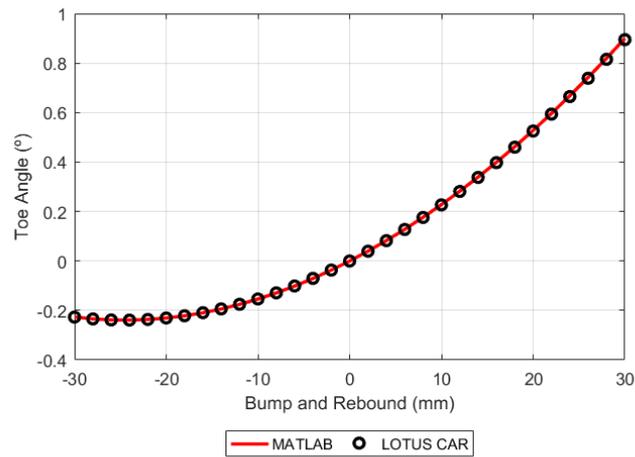


Figura 5. Comparação do ângulo de convergência.

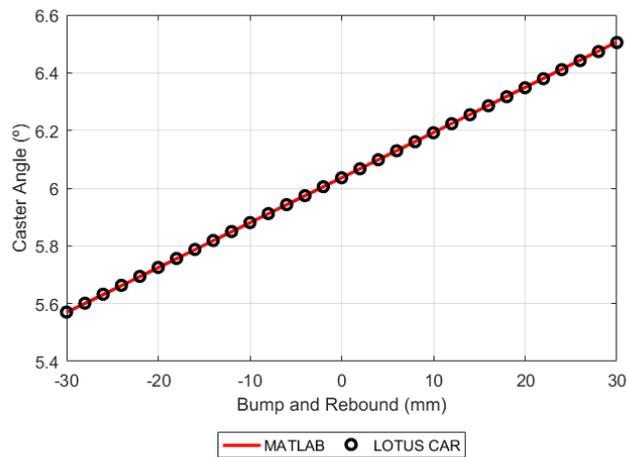


Figura 6. Comparação do ângulo de caster.

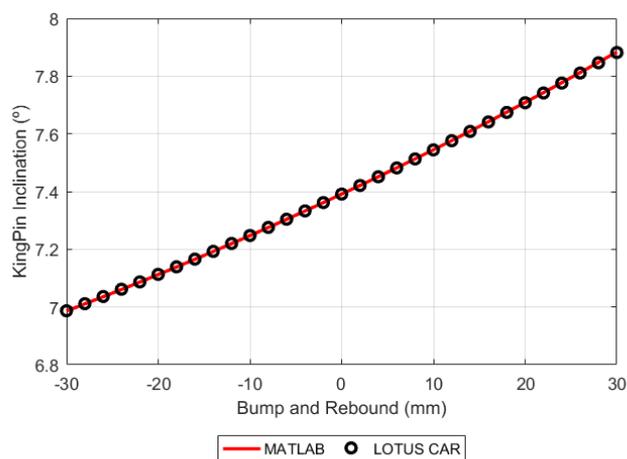
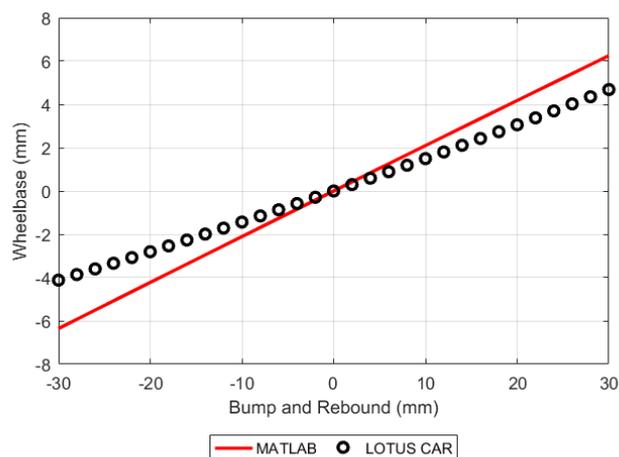


Figura 7. Comparação da inclinação do pino mestre.

O ponto de contato com o solo,  $\{R_{99}\}$ , entretanto apresentou uma pequena variação entre os resultados obtidos. Acredita-se que esta variação se deve ao acúmulo de pequenas divergências no cálculo da posição dos pontos, certo que ao realizar uma análise ponto a ponto, a coordenada X apresentava uma pequena variação nos extremos do movimento vertical entre os métodos, o que não ocorre demasiadamente para as demais coordenadas.

Na Figura 8 apresenta-se o *WheelBase*, ponto de contato do pneu com o solo, para a coordenada longitudinal X, a variação foi de aproximadamente -2 mm para o movimento de *Rebound* e 2 mm para o movimento de *Bump* da roda.

Apesar da diferença apresentada, considera-se que os resultados são válidos, uma vez que eles se aproximam, visto que as curvas apresentam um mesmo padrão e pela simetria vista em relação ao ponto estático do movimento vertical da roda.



**Figura 8.** Comparação do ponto de contato do pneu com o solo.

A partir desse momento, nota-se que as avaliações para o centro instantâneo de rotação, o centro de rotação e a altura do centro de rotação, como visto nas Figuras 9, 10 e 11 apresentam diferenças entre os resultados obtidos de cada um dos métodos, matemático e computacional.

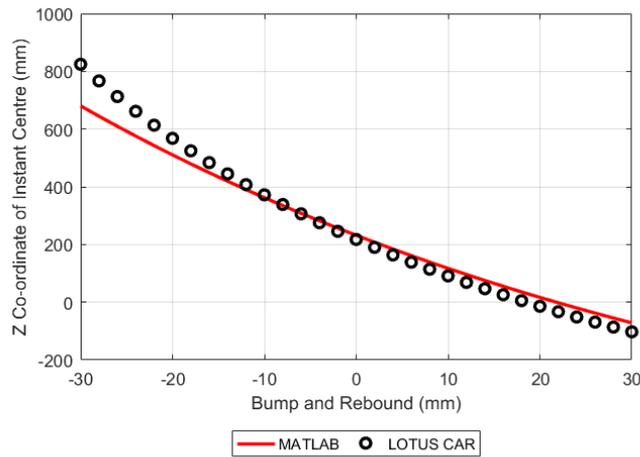


Figura 9. Comparação da coordenada Z do centro instantâneo de rotação.

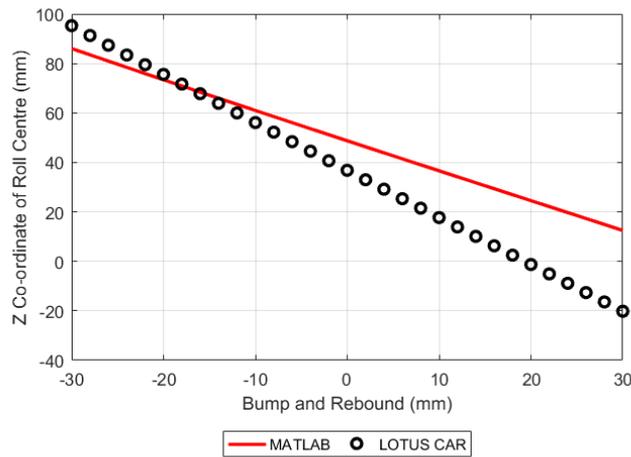


Figura 10. Comparação da coordenada Z do centro de rotação.

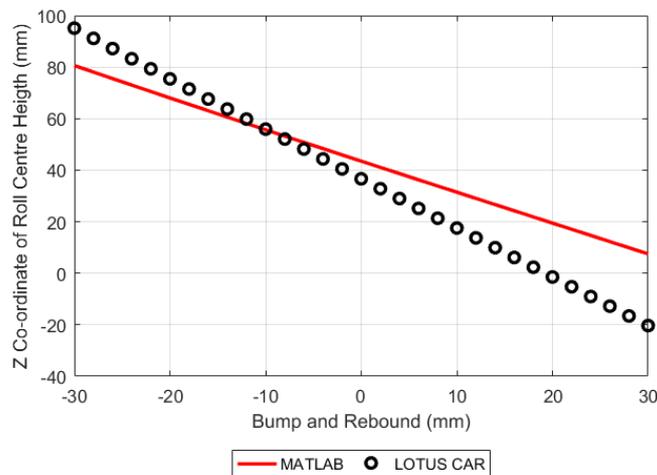


Figura 11. Comparação da altura do centro de rotação.

Apesar da diferença entre os resultados, eles são aproximados e as curvas apresentam um mesmo padrão.

Os resultados da coordenada Z do Centro de Rotação e a Altura do Centro de Rotação (Figuras 9 e 10) são iguais, já que o referencial global se encontra no solo, e a altura está referenciada em relação ao mesmo.

Acredita-se que a variação se deve ao fato de que, para o cálculo dos centros de rotação, é necessário determinar os pontos de fixação das bandejas de suspensão no chassi projetados para análise na vista frontal. Notou-se ainda que, ao realizar uma escolha diferente entre o método de obtenção desses pontos resultará em uma diferença nos valores finais.

#### 4. DISCUSSÃO

Após uma análise detalhada do modelo computacional do software Lotus<sup>®</sup>, notou-se que o mesmo não considera o chassi sendo fixo para obter esses resultados, o que também influencia no resultado final, uma vez que, para encontrar os centros de rotação, é necessário a variação dos braços de suspensão.

Para demonstrar que, apesar da divergência, ambos resultados são válidos dado seus diferentes métodos de aplicação de cálculo, utilizou-se o modelo geométrico desenvolvido no software SolidWorks<sup>®</sup>, seguindo o indicado por Gillespie (1994), para conferir as estimativas dos modelos matemático e computacional.

A princípio, para o modelo matemático, foram obtidos os valores da altura do Centro de Rotação e da coordenada Z do Centro Instantâneo de Rotação, variando o centro da roda verticalmente na vista frontal (Plano YZ) de 2 em 2 mm, percorrendo o curso total de 60 mm entre a variação de -30 mm até 30mm (Tabela 4).

Da mesma forma, seguindo um modelo geométrico, obteve-se valores da altura do Centro de Rotação e da coordenada Z do Centro Instantâneo de Rotação, para o modelo computacional. Porém para esse, o movimento vertical foi realizado pelo chassi (Tabela 5).

Observa-se que cada modelo cinemático corresponde ao seu respectivo modelo geométrico, dessa forma, apesar de serem calculados a partir de referenciais diferentes, os resultados obtidos pelo modelo computacional podem ser considerados aceitáveis.

**Tabela 4.** Valores da altura do Centro de Rotação e coordenada Z do Centro de Rotação Instantâneo, para o Modelo Matemático.

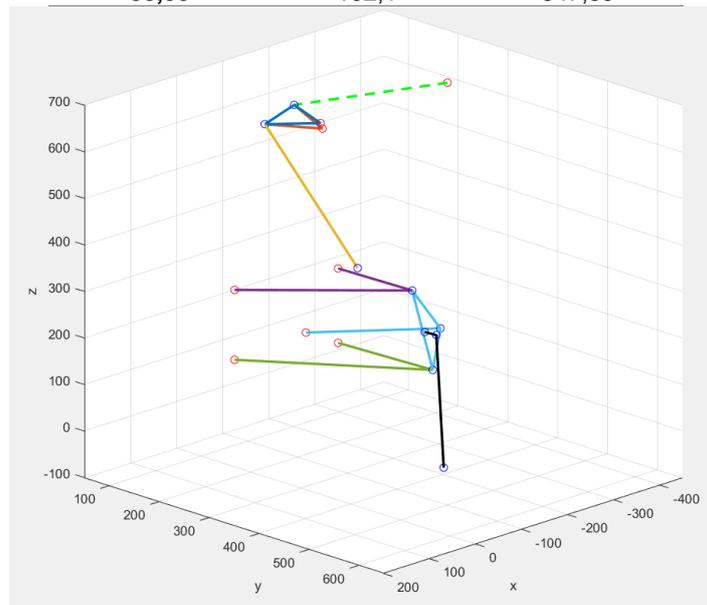
Deslocamento (mm)	altura RC (mm)	coord. Z IC (mm)
30,00	10,44	-56,62
28,00	12,61	-41,18
26,00	14,79	-25,22
24,00	16,98	-8,76
22,00	19,17	8,21
20,00	21,36	25,71
18,00	23,55	43,73
16,00	25,75	62,29
14,00	27,95	81,41
12,00	30,16	101,09
10,00	32,37	121,35
8,00	34,59	142,20
6,00	36,81	163,66
4,00	39,04	185,73
2,00	41,27	208,45
0,00	43,52	231,87
-2,00	45,74	255,60
-4,00	47,99	280,32
-6,00	50,25	305,75
-8,00	52,52	331,90
-10,00	54,79	358,81
-12,00	57,08	386,50
-14,00	59,37	414,98
-16,00	61,67	444,29
-18,00	63,98	474,46
-20,00	66,30	505,51
-22,00	68,63	537,48
-24,00	70,97	570,40
-26,00	73,32	604,32
-28,00	75,68	639,26
-30,00	78,05	675,30

A Figura 12 apresenta o modelo geométrico obtido do modelo matemático no MATLAB®. A linha verde tracejada representa o amortecedor; os triângulos azul escuro e vermelho representam o *Bell-crank*; a linha amarela representa o *Push-rod* (haste de acionamento); as linhas roxas representam o braço superior da suspensão, enquanto as verdes representam o braço inferior; as linhas azul claro representam a manga de eixo, formadas pela triangulação e o braço de controle, linha acoplada; as linhas pretas representam o eixo de rotação da roda, formadas pelo ponto do centro da roda e a ponta de eixo. A linha preta em direção ao solo, para baixo, representa o ponto de contato pneu-solo, em relação ao centro da roda. Os círculos vermelhos representam os pontos fixos, e os círculos azuis representam os pontos moveis.

Como pode ser visto o modelo cinemático adquirido através do software Lotus®, na Figura 2, é semelhante ao apresentado pelo modelo do MATLAB® (Figura 12).

**Tabela 5.** Valores da altura do Centro de Rotação e coordenada Z do Centro de Rotação Instantâneo, para o Modelo Computacional.

Deslocamento (mm)	altura RC (mm)	coord. Z IC (mm)
30,00	-26,63	-132,66
28,00	-22,42	-113,4
26,00	-18,22	-93,59
24,00	-14,02	-73,2
22,00	-9,81	-52,22
20,00	-5,61	-30,61
18,00	-1,4	-8,35
16,00	2,81	14,6
14,00	7,02	38,25
12,00	11,24	62,65
10,00	15,46	87,83
8,00	19,69	113,83
6,00	23,92	140,69
4,00	28,16	168,45
2,00	32,41	197,17
0,00	36,66	226,88
-2,00	40,93	257,66
-4,00	45,21	289,56
-6,00	49,49	322,64
-8,00	53,79	356,98
-10,00	58,1	392,65
-12,00	62,43	429,75
-14,00	66,77	468,37
-16,00	71,12	508,6
-18,00	75,49	550,58
-20,00	79,88	594,43
-22,00	84,28	640,29
-24,00	88,77	688,32
-26,00	93,15	738,71
-28,00	97,61	791,66
-30,00	102,1	847,39



**Figura 12.** Modelo geométrico da suspensão duplo A no software MATLAB®.

Observa-se que cada modelo cinemático corresponde ao seu respectivo modelo geométrico, dessa forma, apesar de serem calculados referenciais diferentes, os resultados obtidos pelo modelo computacional podem ser considerados aceitáveis.

## 5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho foi proposta uma metodologia para modelagem matemática e análise cinemática de uma suspensão do tipo duplo A de um veículo de competição Fórmula SAE. Após a criação do modelo matemático usando o software MATLAB®, os resultados foram validados com o modelo da suspensão criado no software Lotus®.

A variação apresentada entre os valores teóricos e do programa se deve ao fato de que o programa Lotus® utiliza uma abordagem diferente para definir a posição do Centro Instantâneo de Rotação, Centro de Rotação e altura do Centro de Rotação, onde o chassi não é considerado fixo. Ao invés disso, considera a roda como fixa no solo e a estrutura do veículo sofre o movimento vertical, alterando a posição dos braços de suspensão.

Apesar desta diferença observada, a validação da análise do modelo computacional se confirma com as análises das variações na geometria do sistema de suspensão desenvolvido durante o movimento vertical da roda, ao comparar os valores das inclinações e ângulos principais da cinemática de uma suspensão duplo A, ângulo de cambagem, ângulo de caster, convergência e inclinação do eixo de direção. A precisão nos valores das coordenadas dos pontos móveis obtidos, demonstra que toda teoria cinemática aplicada pelo modelo matemático está presente no modelo computacional.

## REFERÊNCIAS

- DIXON, J. C. **Suspension geometry and computation**. Chichester, U.K.: Wiley, 2009.
- BLUNDELL, M.; HARTY, D.; SOCIETY OF AUTOMOTIVE ENGINEERS. **Multibody systems approach to vehicle dynamics**. Oxford; Burlington, Ma: Elsevier Butterworth-Heinemann, 2004.
- GILLESPIE, T. D. **Fundamentals of vehicle dynamics**. Society of Automotive Engineers, 1994.
- MILLIKEN, W. F.; MILLIKEN, D. L. **Race car vehicle dynamics**. Warrendale, Pa, U.S.A.: Sae International, 1995.
- JAZAR, R. N. **Vehicle dynamics: theory and application**. New York Etc.: Springer, Cop, 2014.